

Matemática

1. Fundamentación

La perspectiva histórica muestra que la Matemática es un conjunto de conocimientos en evolución continua, y que en esa evolución cumple un papel importante la necesidad de resolver problemas prácticos.

Grandes áreas de la Matemática tuvieron su origen y se desarrollaron precisamente, a partir del tratamiento de problemas planteados por otras ciencias.

Asimismo, existe también una evolución propia de la Matemática, que no está relacionada con sus aplicaciones; los mismos conceptos matemáticos se han ido precisando, ampliando, se han generado otros, llegando a desarrollar amplias teorías.

Estas consideraciones llevan a la necesidad de mostrar la Matemática como una ciencia abierta, enmarcable históricamente, conectada con la realidad, que brinda posibilidades de exploración, de construcción de nuevos conocimientos, en contraposición con la idea preconcebida, fuertemente arraigada en nuestra sociedad (idea que probablemente proviene de bloqueos iniciales de muchos) de que la Matemática es aburrida, inútil, inhumana y muy difícil.

La Matemática, pensada en razón de su enseñanza escolar, debe ser considerada más como un proceso de pensamiento que como una acumulación de resultados logrados por otros.

En la situación de transformación vertiginosa de la sociedad actual, es claro que el proceso verdaderamente eficaz de pensamiento, que implica construir y aplicar ideas conectadas lógicamente y que no se vuelve obsoleto con tanta rapidez, es lo más valioso que podemos proporcionar a nuestros jóvenes.

Esta concepción de la Matemática pone en evidencia tanto su valor formativo, basado en su método de razonamiento (hipotético - deductivo), como su valor instrumental, por su utilidad para la resolución de problemas, razones por las cuales ha figurado siempre en los currículos escolares y debe seguir haciéndolo en la actualidad. A esto se une el valor social que la Matemática ha incrementado en la actualidad como medio de comunicación para dar y recibir información, para interpretarla y tomar decisiones correctas en base a ella. Por último, la difusión de valores democráticos y de integración social, el ejercicio de la crítica y el esfuerzo por la acción comunicativa son también elementos clave a tener en cuenta en la planificación y desarrollo de la Matemática escolar.

Si se hace hincapié en su **valor formativo**, se destaca su carácter de ciencia con una estructura lógica rigurosa. El tan mentado aforismo que la Matemática enseña a pensar (siempre y cuando se otorgue a los estudiantes la oportunidad de hacerlo) tiene su explicación auténtica en el método de razonamiento que exige la disciplina. La capacidad individual para explorar, conjeturar, razonar lógicamente, utilizando distintas estrategias para la resolución de problemas, se constituye en una meta ineludible para la Matemática escolar.

La búsqueda de rigor y el lenguaje preciso y conciso de la Matemática colaboran a desarrollar:

- la claridad y precisión en las ideas,
- un estilo lógico y reflexivo de pensamiento,
- una actitud crítica y objetiva frente a la realidad,

- el uso de la memoria basada en la comprensión,
- la creatividad en la búsqueda de soluciones, afirmada en la intuición, la imaginación y la inventiva,
- la formación de valores, actitudes y hábitos como la tenacidad, el orden, la rigurosidad, la exactitud, la perseverancia,
- la posibilidad de "control interno" de los "saberes y haceres", ya que el sujeto puede buscar la coherencia entre la acción y sus resultados, dado que en Matemática hay pocas posibilidades de atribuir un resultado a la casualidad o a factores externos, potenciando así el sentido de autocrítica y autoevaluación. (Galvez - Villarroel, 1988)

Es importante la consideración sobre el razonamiento empírico inductivo, tanto en el proceso histórico como en el trabajo matemático. En la elaboración de proposiciones y teorías existe un trabajo intuitivo previo, no solo en la actividad concreta sobre los objetos sino también en los procedimientos intelectuales; contribuyendo a encontrar soluciones particulares, a modificar condiciones de problemas, a buscar ejemplos y contraejemplos, a realizar distintas aproximaciones intuitivas hasta llegar a formalizar los resultados que luego se demostrarán con rigor lógico. El carácter deductivo de la Matemática se incorpora en forma paulatina, y los procedimientos citados anteriormente contribuirán a que axiomas y proposiciones estén provistos de significación al haber sido incorporados atendiendo al razonamiento propiamente dicho, más que a la forma o presentación de los mismos.

También la Matemática ha justificado su permanencia en las aulas por su **valor instrumental**, en tanto permite interpretar, representar, explicar, predecir y resolver situaciones del mundo natural y social en que vivimos.

Se la utiliza no sólo en el dominio de la física, la ingeniería o la economía, disciplinas a las que se la vio asociada desde sus orígenes, sino que también ha penetrado otras ramas de la ciencia, como, la biología, el comercio, la medicina, la sociología y hasta la lingüística, brindándoles su método, su lenguaje y, hasta a veces, sus estructuras.

La idea de la Matemática como una ciencia abierta debe atender a estas dos valores antes mencionados, que no son en absoluto antagónicos sino complementarios.

Una parte de la actividad matemática puede ser descrita como el proceso de construir un modelo matemático de la realidad (matemática o extramatemática) que se quiere estudiar, constituyéndose en una herramienta de uso fundamental en la relación interdisciplinaria. El proceso de modelizar se puede esquematizar de la siguiente manera: 1) determinar y transformar la situación en un problema matemático asociado usando el lenguaje de esta ciencia para representar objetos, fenómenos y relaciones del campo de conocimiento sobre el que se cuestiona, reconociendo datos e incógnitas; 2) resolver el problema matemático en base al método de esta disciplina y 3) comprobar cómo los resultados se ajustan a esos objetos, fenómenos o ideas originales.

Este intercambio con otras áreas de conocimiento, sin lugar a dudas, ha sido y es beneficioso para la propia Matemática, al proveerle de problemas que le exigen análisis e investigaciones que pueden llevar a nuevos resultados.

Pero la Matemática, que se ha venido desarrollando históricamente, no sólo está motorizada por problemas ajenos a ella misma sino principalmente, por problemas intramatemáticos, cuya solución ha sido fuente de nuevos problemas, que también son objetos de modelización.

Actualmente, a estas dos poderosas razones se impone una tercera: la Matemática tiene **valor social** ya que se encuentra hoy por fuera de la academia, las aulas y los libros. Está ampliamente instalada en la vida cotidiana, donde la ciencia y la tecnología la tienen de importante aliada como **medio de comunicación generalizado**.

Su uso en el deporte, en el consumo, en el tráfico y sus códigos reguladores, en las tecnologías de la información, en los medios de comunicación, en la salud, en los transportes; son tan sólo algunos ejemplos de la vida cotidiana que exigen saber Matemática. Pero también discutir el sostenimiento de recursos naturales, los riesgos y beneficios de la energía nuclear, el modelo económico de país, etc., requiere de ciudadanos con preparación Matemática suficiente para poder tomar con independencia decisiones fundamentadas.

La Matemática desde su lenguaje y desde su método se ha constituido en la vía de comprensión y mejoramiento del medio natural, social, científico, industrial y tecnológico en que vivimos. Por lo tanto, las razones de su enseñanza escolar exceden ya el propósito de contribuir al desarrollo personal y la capacitación instrumental individual de los estudiantes. Saber pensar y comunicarse matemáticamente constituye hoy una necesidad social que debe ser atendida en la escuela para que el estudiante logre su inserción real y autónoma en el mundo actual.

Considerar la **dimensión política** de la educación matemática significa que, a través de su estudio en la escolaridad secundaria, es posible colaborar a que los estudiantes fundamenten los conocimientos que necesitan como ciudadanos comunes, para su desarrollo personal y para comenzar a comprender las bases y posibilidades de la tecnología y la ciencia modernas, sin interpretaciones impropias del conocimiento científico. Y más aún, *“estar en condiciones de hacer razonamientos medianamente abstractos y de extraer conclusiones a partir de observaciones de experiencias es también un hecho político. Cuantas menos personas tengan esa capacidad, menos democrática será la sociedad en la que viven.”*⁷⁵

Es por eso que una escuela orientada hacia la consecución de valores democráticos, junto con los valores formativos individuales, debe enfatizar el aprendizaje reflexivo de todo conocimiento matemático.

Asimismo, en este nivel, las distintas Orientaciones (Ciencias Naturales, Comunicación, Ciencias Sociales, Economía y Administración, entre otras), colaborarán significativamente en la formación de los estudiantes como ciudadanos críticos para desempeñarse en el ámbito de los estudios superiores y del trabajo.

Sobre la base de lo expuesto, y en relación con los saberes de la Matemática para los estudiantes de este nivel, se tomará como eje organizador de esta disciplina:

El o los modos de razonamiento y el lenguaje de la Matemática permiten al estudiante interpretar, representar, explicar, predecir y resolver, tanto situaciones de la vida cotidiana como del mundo natural y social en que vive, para poder integrarse racional y activamente en el mismo, y así colaborar en su transformación positiva.

⁷⁵ Informe final de la Comisión Nacional para el mejoramiento de la enseñanza de las Ciencias Naturales y la Matemática. Agosto de 2007. Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología.

2. Encuadre didáctico

En este apartado se trata la enseñanza de la Matemática en relación con el estudiante de estos dos últimos años de la escuela secundaria, explicitando: los propósitos generales que direccionan la enseñanza y cuya consecución se espera en estos años, los contenidos a enseñar en los mismos y las bases en las que se apoya dicha enseñanza.

La Matemática en los últimos años de la escuela secundaria

Hay indicios que circulan en las escuelas, de orden subjetivo y que no han sido dimensionados, pero que no dejan de ser preocupantes, en cuanto a que los adolescentes y jóvenes, en general, no responden a lo esperado por los docentes o, como mínimo, al modelo para el que ellos fueron preparados en su formación. Asimismo, existe la sensación de una pronunciada caída en sus aprendizajes y en la capacidad de transferir conocimientos, como así también una visión negativa que los considera poco comprometidos con el estudio y la disciplina; dispersos; apáticos; poco dispuestos a esforzarse fuera de los horarios de clase; con habilidades acrecentadas para tratar de bajar las exigencias y aprobar materias, dejándolas atrás como meros trámites.

Por un lado, se describen estas deficiencias que restringen el aprendizaje y, por el otro, los jóvenes consideran que las prácticas escolares no los convocan *“como si sus vidas se interrumpieran durante unas horas, para continuar luego a la salida de la escuela donde tiene verdaderamente acceso a la cultura (música, cine, televisión internet).”*⁷⁶

Los mundos culturales que separan a docentes y estudiantes parecen irreconciliables, sobre todo porque se considera que los jóvenes no integran los lenguajes ni ciertos valores que caracterizan la cultura escolar. Ellos tienen la propia, que se ajusta más a una cultura global, tecnológica, abierta y con una mejor adaptación al mundo que muchos adultos, a quienes les cuesta comprender el nuevo estado de las cosas, producto también de los cambios acelerados.

En esta nueva realidad, el docente tiene que redescubrir quiénes son los estudiantes, qué pretenden, en qué condiciones transitan su escolaridad, tendiendo puentes entre sus culturas y la escolar, trabajando sobre los elementos comunes que se plantean entre ellas y, al mismo tiempo, estableciendo relaciones con los nuevos modos de producir y transmitir el conocimiento, elementos esenciales para emprender cualquier diálogo, y sin perder de vista que uno de los propósitos centrales de la educación del futuro es *“el aprender a aprender”*. *Ya no se trata simplemente de aprender determinado cuerpo de conocimientos e informaciones, sino de aprender mecanismos, operaciones y procedimientos, desarrollar habilidades y competencias que permitan actualizar nuestros conocimientos y aplicarlos. [...] Entonces el “aprender a aprender” deber ser un horizonte de referencia del trabajo didáctico y pedagógico del profesor.*⁷⁷

Si el docente para planificar su enseñanza tiene en cuenta la curiosidad natural de los adolescentes y jóvenes, su sentido ético y estético, su deseo de conocerse, sus intereses

⁷⁶ Fanfani, T. (2003) citado por Quintana, C. en: **Brecha** entre las nuevas **culturas** juveniles y la cultura **escolar**. Del desencuentro a las posibilidades. Revista Novedades Educativas N° 208. Escuela Media. Entre el Malestar y las Posibilidades. Abril de 2008.

⁷⁷ Concepción de Aprendizaje del Marco Teórico del Diseño Curricular del Ciclo Básico de la Escuela Secundaria Rionegrina. Ministerio de Educación. Provincia de Río Negro. 2008.

*inmediatos, su entorno, puede lograr rendimientos inesperados,*⁷⁸ ya que sus procesos cognitivos y motivaciones interactúan con los métodos de enseñanza empleados en la clase.

Desde el punto de vista cognitivo, acceden a mayores niveles de abstracción, generalización y formalización que en los años anteriores. También tienen mayor capacidad de análisis y síntesis frente a distintas alternativas, y de toma de decisiones sobre resoluciones de situaciones o problemas. Pueden trabajar cooperativamente con otros y son más autónomos en el estudio y en la realización de tareas. De allí que en este diseño curricular de Matemática se contemple la ampliación, profundización, integración y sistematización de los conocimientos numéricos, geométricos, algebraicos, probabilísticos y estadísticos, entre otros.

Sin embargo, los estudiantes no suelen ver que los niveles de concentración y abstracción que exige la Matemática son compatibles con sus motivaciones o posibilidades cognitivas. Por lo tanto, hacer que aprendan a gustar de la Matemática y a trabajar en ella, sigue siendo un gran desafío.

En general, se pretende que *“profundicen la percepción y comprensión de la estructura conceptual de la disciplina, su método de trabajo, su lenguaje específico y su marco axiológico”*⁷⁹. Esto implica sistematicidad en el tratamiento de los contenidos, lo cual no quiere decir tratarlos a todos y cada uno aisladamente, sino que la única forma que los estudiantes salgan preparados para afrontar las demandas de la sociedad actual, es a través de un conocimiento global, que encadene ideas, que descubra relaciones entre lo sabido y lo nuevo, que haga analogías entre un tópico y otro, potenciando así sus posibilidades de comprender la estructura de la Matemática.

La sistematicidad no implica tampoco una formalización rigurosa, ni lenguaje simbólico impuesto a ultranza. En la escuela media se acostumbra a introducirlos inmediatamente en la sintaxis del lenguaje algebraico y, aunque menos en esta última década, en los pasos estrictos del método deductivo; con grandes fracasos en ambos aspectos.

El tratamiento del error, considerado como un esquema cognitivo inadecuado más que una falta específica de conocimientos, es fuente de aprendizaje y base para comprender, justamente, sus estructuras cognitivas. La detección de errores y preconceptos como parte de sus ideas previas son un primer paso en la planificación de la enseñanza matemática.

Asimismo, cuando el estudiante transfiere o generaliza un aprendizaje de una situación a otra, a través de distintos lenguajes, el docente podrá captar e interpretar sus comprensiones.

Justamente, la Matemática tiene la cualidad de usar varios lenguajes (oral, escrito, concreto, gráfico, simbólico, etc.) para expresar el mismo concepto y, por otro lado, un concepto matemático puede presentarse en diversos contextos. Por ejemplo, el concepto de función podrá estudiarse en un marco aritmético, geométrico, de medida y de probabilidad. Las dificultades que surgen al tratar los objetos y las relaciones matemáticas con el lenguaje común, son de gran valor para comprender la utilidad del lenguaje matemático simbólico, preciso y universal, de acuerdo al contexto aritmético, geométrico, de proporcionalidad, de medida, de estadística, etc. en que se esté trabajando.

⁷⁸ Cardelli, J.; Yaksich, A. y García, L. Módulo 1: La matemática en la enseñanza secundaria. Programa de Actualización Disciplinar 2007. Comisión Resolución 611/06. Consejo Pcial de Educación. pp. 78-82.

⁷⁹ Sánchez de Magurno, J., 1996, Caracterización del Tercer Ciclo de EGB en relación con sus funciones y destinatarios. Ministerio de Cultura y Educación. Villa Giardino. Córdoba.

Debemos hacer hincapié en que, si bien el lenguaje simbólico posibilita que la Matemática atienda a "*su función principal, esto es, convertir los objetos matemáticos en objetos manipulables y calculables, permitiendo así lograr inferencias que de otro modo serían imposibles*" (Gómez Granell, C. 1996), es necesario orientar primero a los estudiantes hacia la comprensión de esos objetos matemáticos de modo de tornarlos capaces de relacionar esos símbolos con su significado y usarlos con propiedad en la resolución de problemas. Antes de llegar al uso del simbolismo, el docente debe estar atento a que el propio discurso matemático "*incluye términos especializados y significados distintos de los habituales en el habla cotidiana*"⁸⁰, y que es necesario discutirlos a fin de clarificar sus usos. Esto es importante, ya que en la clase se da un proceso de reconversión y confrontación de la experiencia cognitiva del conocimiento privado del alumnado, con el conocimiento público representado por las disciplinas académicas.

Un peligro en estos años lo constituye el hecho de querer pasar rápidamente de los casos particulares y relativamente sencillos que los estudiantes pueden haber abarcado en los años anteriores, a la Matemática formalizada, tal como aparece en los textos "*dando conocimientos vaciados de sentido y distanciados de su uso*".⁸¹

Otro peligro lo constituye la imposición de reglas para las "demostraciones" que puedan hacer, ya que en Matemática sólo se entiende por demostración la que utiliza el método deductivo.

En este sentido, es necesario que comiencen a distinguir las formas de prueba de las distintas ciencias, y por lo tanto tomen conciencia del método de la Matemática. Utilizar este método no implica un estricto uso de todos los pasos lógicos y del simbolismo matemático. Los estudiantes suelen hacer cadenas deductivas parciales que pueden ser traducibles al lenguaje matemático oral y escrito. De allí, se podría pasar al análisis de los pasos implícitos en su razonamiento, y posteriormente al análisis de la conveniencia del lenguaje simbólico y las reglas que rigen la demostración en Matemática. Es preferible que adquieran confianza en comunicar sus hallazgos, y no que se inhiban de hacerlo por no haber seguido una línea de pensamiento totalmente explicitada o por no usar un lenguaje simbólico riguroso.

A partir de lo expuesto, en este nivel se deberá tener en cuenta que:

- ocupará un lugar relevante el tratamiento de saberes que permitan hacer explícitas relaciones conceptuales, pasando de la clasificación y jerarquización a una conceptualización más organizada, además de continuar desarrollando un trabajo experimental como soporte de la abstracción. Atendiendo a esta capacidad de abstracción, no solamente desde la manipulación de objetos sino desde la representación de conceptos, se tratarán saberes que favorezcan la formalización de los mismos, adquiriendo el carácter de definiciones (teniendo en cuenta que, antes de formalizar y definir, hay que sistematizar y usar correctamente el lenguaje).
- si bien es el razonamiento deductivo el estrictamente apropiado para demostrar un resultado en Matemática, resulta importante que el estudiante, más que llegar a demostrar rigurosamente, mejore su intuición y sea capaz de construir y evaluar conjeturas y argumentos variados mediante diferentes tipos de razonamiento (inductivo, analógico, deductivo), reconociendo las ventajas y las limitaciones de los mismos.

⁸⁰ Pimm, D., 1990, El lenguaje matemático en el aula. Madrid. Ed. Morata.p.32

⁸¹ Martins Suárez, D. y Penha López, M., 1997, Sussesos e fracasso em Matemática. Presentación en el Encuentro sobre Teoría e Pesquisa em Ensino de Ciências. Brasil. (En el Módulo 1 se trató el tema del sentido de los saberes. Cardelli, J.; Yaksich, A. y García, L. Módulo 1: La matemática en la enseñanza secundaria. Programa de Actualización Disciplinar 2007. Comisión Resolución 611/06. Consejo Pcial de Educación. pp. 73-77).

- importa especialmente que el estudiante logre un pensamiento flexible que lo haga capaz de descubrir y establecer relaciones entre distintos conceptos y transitar libremente entre un concepto, sus distintas representaciones (incluida la simbólica) y su uso en contextos variados.
- la diversidad ocasionada por las desigualdades propias del contexto sociocultural de procedencia de los estudiantes, muestra de lo que acontece en la vida fuera de la escuela, junto con su creciente diferenciación de intereses, expectativas y posibilidades (propias del grupo de edad), exige estrategias de enseñanza variadas y adecuación de las actividades de aprendizaje a los ritmos y motivaciones individuales.
- si bien el docente debe conocer, valorar y utilizar con propiedad el lenguaje formal de la Matemática, no puede imponer su uso a todos los estudiantes en el mismo tiempo. Utilizar distintos lenguajes para modelizar situaciones y comunicarse puede ayudar a que cada uno encuentre una forma de expresión que le sea más accesible. El análisis de las ventajas y desventajas de los distintos lenguajes hará que todos evolucionen en el uso de los mismos.
- el estudiante debe captar la conexión entre conceptos y formas de hacer de la Matemática y su uso en la vida cotidiana, apreciando que esta disciplina es una actividad humana natural, común y familiar, y que su adquisición es de importancia capital para su mejor desempeño como ciudadano crítico, y en el ámbito de los estudios superiores y del trabajo.
- el aprendizaje de la Matemática puede ser interesante y motivador, pero para que así suceda, no solamente se debe trabajar en un clima de respeto mutuo sino también, alentar a los estudiantes a la experimentación, al intercambio de ideas, a la discusión y a la comprobación de resultados con diferentes recursos y procedimientos; comprometiendo sus propias convicciones, utilizando un lenguaje apropiado, y dando argumentaciones de orden matemático y no simplemente opiniones. La riqueza de situaciones que el docente presente, despertarán el interés, alentarán la comprensión y estimularán la creatividad. Será importante promover en las clases: la participación general; el respeto y la escucha de los aportes de los compañeros y las preguntas acerca de lo no comprendido.

Este clima de trabajo propiciará, a su vez, que cada uno adquiera confianza en poder trabajar en Matemática, fortaleciendo la disposición para enfrentar situaciones en forma autónoma y aumentando la constancia para resolverlas.

2.1. Propósitos

La resolución de problemas de la vida real, de otras disciplinas y de la propia Matemática, para la ampliación, profundización, integración y sistematización de los conocimientos y sus diversas formas de representación; en relación con:

- la visualización y generalización de propiedades y sus relaciones en distintos marcos (aritmético, geométrico, algebraico, etc.).
- las estrategias y heurísticas, que impliquen el uso de la intuición, la creatividad y todas las formas de razonamiento lógico, destacando el papel de la deducción en la prueba matemática.
- la tecnología para procesar información, comunicarla y visualizarla según la naturaleza de los contenidos a tratar.

- los conjuntos numéricos (N, Z, Q, R, C), las operaciones y las distintas formas de cálculo, diferenciando sus ventajas de uso.
- la modelización de fenómenos utilizando distintos tipos de funciones, sucesiones, vectores, secciones cónicas, ecuaciones, inecuaciones, tanto en forma analítica como gráfica.
- los conceptos de límite y derivada para el análisis de funciones.
- las nociones de la geometría de coordenadas necesarias para el estudio de las figuras y los cuerpos.
- el tratamiento de la información utilizando conceptos de estadística y probabilidad, y los fenómenos aleatorios y probabilísticos.
- la confianza para poder trabajar en forma autónoma con la Matemática, integrándola a su desempeño en la vida cotidiana y en otras disciplinas.
- la valoración de la perseverancia, el esfuerzo y la disciplina en el quehacer matemático.
- la formación de una actitud crítica constructiva sobre las producciones propias y ajenas, estimulando el uso del razonamiento lógico para la identificación de resultados y procedimientos correctos e incorrectos, y para la toma de decisiones.
- el uso adecuado de los diversos lenguajes matemáticos y la presentación ordenada y clara de procedimientos y resultados.
- la cooperación y la toma de responsabilidades basadas en el consenso y el respeto por las normas acordadas, que favorecen el trabajo individual y común.

2.2. Contenidos

“Es evidente lo difícil que resulta definir contenidos que puedan servir a alumnos tan distintos, en una sociedad donde las culturas son tan diversas, complejas y especializadas. Pero sea cual fuere la forma de adoptar decisiones que exista en un país para determinar los contenidos obligatorios para todos los alumnos, lo importante es que existan posibilidades y mecanismos democráticos de expresión.”⁸²

Los contenidos escolares son los saberes y formas culturales cuyos aprendizajes están previstos en este Diseño Curricular. En los cuadros correspondientes a los mismos, los saberes / contenidos están escritos en letra normal y, en cursiva, figuran las orientaciones para la enseñanza de algunos de ellos.

Se ha sostenido la continuidad del eje transversal relacionado con el desarrollo de las actitudes en los estudiantes de este nivel, y se han definido cuatro ejes temáticos. Estos ejes se presentan como un continuo, sin cortes bruscos entre los dos años.

En el eje transversal acerca de las actitudes, se han incluido aquellas más afines con los objetos de conocimiento de la disciplina, categorizándolas en **relación con el desarrollo personal, el conocimiento matemático, su producción y forma de comunicación, y la vida**

⁸² Gvirtz, S., Palamidesi, M.: El ABC de la tarea docente: Currículum y enseñanza. Aique. Buenos Aires. 2005.

en sociedad. Además, se han incorporado en los distintos componentes del diseño, tales como la Fundamentación, los Propósitos, los Ejes Temáticos, la Metodología y los Lineamientos de Acreditación.

Los cuatro ejes temáticos propuestos: **Número y Operaciones, Geometría y Álgebra, Funciones y Álgebra, Estadística y Probabilidades;** responden a categorías de la Matemática ampliamente difundidas, y atienden a las necesidades matemáticas actuales del ciudadano común. Estos ejes proveen a los docentes de un referente para lograr un equilibrio de los contenidos a enseñar, ayudándolos a ampliar la mirada de la Matemática escolar.

En estos ejes, se contempla la profundización y ampliación de los campos numéricos, del estudio de las funciones y su comportamiento en relación con las distintas formas de representación, utilizando para dicho estudio el cálculo infinitesimal. Se profundiza el estudio de las ecuaciones, de las rectas y cónicas como herramientas para la modelización de problemas que provienen de diversos ámbitos. Se sistematizan los temas de probabilidad y estadística, con el fin de utilizarlos en el estudio de diversos fenómenos y en la toma de decisiones.

Sin embargo, esta presentación posee limitaciones que los mismos docentes deberán superar cuando elaboren su Planificación. Por ejemplo, no existe una jerarquía de tópicos en los ejes y, de hecho, existen ideas matemáticas que no se ajustan a un eje estrictamente sino que atraviesan varios de ellos. Estas ideas, que surgen de una mirada de mayor nivel sobre los contenidos y que podemos llamar unificadoras o integradoras, constituyen tópicos relevantes de la Matemática y son las que dan convergencia y conexión a los conceptos de los distintos ejes. Por su complejidad y profundidad requieren tiempos largos de tratamiento espiralado, de modo que en cada año se debe asumir lo conceptualizado en el año anterior utilizándolo, ampliándolo y enriqueciéndolo en distintos contextos. Ejemplos de estas ideas son: las funciones, las ecuaciones, los lenguajes de la matemática, entre otros.

Lograr en los estudiantes un aprendizaje globalizado de la Matemática, depende en gran parte de la tarea que el docente realice para planificar su enseñanza en forma no fragmentada, sino poniendo en juego más de una idea unificadora en cada tema.

Ya en esta etapa se aspirará a que los estudiantes logren conceptualizaciones organizadas y definiciones claras de los contenidos conceptuales de cada eje.

Como en la Fundamentación se ha caracterizado a la Matemática como “proceso de pensamiento”, el aprendizaje de los procedimientos que ella utiliza es un propósito primordial de su enseñanza, sin descartar el de los conceptos sobre los cuales o con los cuales estos operan. En efecto, los procedimientos se extienden desde su lugar primigenio de uso, es decir la Aritmética, a otros ejes de contenidos, y es así como se habla de procedimientos en el Álgebra, en la Estadística, en la Probabilidad. Esto supone entender que existen procedimientos propios de estos ejes que no son sólo extensiones de los aritméticos. Conocer los procedimientos del quehacer matemático no es sólo ejecutarlos. Es también, saber por qué funcionan o no y cómo verificar que con ellos se obtienen las respuestas correctas. Los estudiantes deben comprender qué conceptos subyacen a los procedimientos y la lógica con que se justifican.

Atender al aprendizaje de la Matemática desde esta óptica debe ir acompañado, simultáneamente, por las **Actitudes** que el estudiante ha de desarrollar a través del trabajo con ella y en pro del mismo. Sin valorar la Matemática para su vida cotidiana, sin confianza en su posibilidad de trabajar en ella en forma individual y con otros, sin saber tolerar el error propio y ajeno, sin encontrar gratificación en la resolución de problemas, será difícil que avance en un real aprendizaje de esta disciplina.

2.3. Consideraciones metodológicas

¿Cómo enseñar y aprender Matemática?

El trabajo matemático deberá resaltar, tanto la utilidad y la funcionalidad como la potencialidad para desarrollar saberes relacionados con la resolución de problemas, la modelización, la argumentación para la justificación de procedimientos y resultados, y la búsqueda y el intercambio de ideas.

Parece existir un consenso generalizado sobre la importancia de la resolución de problemas tanto en la Matemática como en su enseñanza. Sin embargo, esta actividad está lejos de poseer un único significado y una misma finalidad.

La resolución de problemas podrá combinarse de manera pertinente con otras actividades de aprendizaje, como juegos, debates, investigaciones, exposiciones (del docente y los estudiantes), ejercitaciones, etc., ya que todo contribuye a generar aprendizajes significativos y al desarrollo de la confianza en la propia capacidad para enfrentar con éxito nuevos desafíos cognitivos.

Se entiende por problema, no a la ejercitación rutinaria que afianza conceptos ya adquiridos, sino toda situación que lleve al alumno a utilizar los instrumentos cognitivos que posee y que, ofreciéndole algún tipo de dificultad que los torne insuficientes, le obligue a engendrar nuevos conocimientos, modificando (enriqueciendo o rechazando) los que hasta el momento poseía.⁸³

El descubrimiento, creación y adquisición de conocimientos por parte de las personas se realiza, en general, en el curso de acciones dirigidas a un fin. La historia de la Matemática y el modo de trabajo de los científicos son claros ejemplos respecto de cómo se hizo y se hace Matemática. En la mayoría de los casos las ideas de esta disciplina han surgido como respuestas a problemas, tanto de:

- ✓ la vida cotidiana (delimitación de terrenos, creación de calendarios, predicción de resultados en los juegos de azar, confección de censos, estimación de poblaciones, etc.),
- ✓ de otras ciencias (la mecánica que requirió del análisis; la cartografía que impulsó la geometría descriptiva y la geodesia; la astronomía y la náutica que demandaron de la trigonometría, la geometría esférica y la teoría de errores; etc.)
- ✓ internos a la Matemática misma (las ecuaciones imposibles de resolver en un conjunto numérico determinado, la discusión acerca del postulado euclidiano de las paralelas, el uso del álgebra en la geometría, etc.).

Si el cometido de la enseñanza y del aprendizaje de la Matemática es que los estudiantes se apropien de sus ideas fundamentales, de sus formas de razonamiento y de comunicación, y encuentren su sentido para describir y explicar aspectos del mundo que nos rodea, el problema constituye la herramienta epistemológica y didáctica apropiada.

Desde esta perspectiva es que la enseñanza de la Matemática escolar tomará como eje didáctico - metodológico y como propósito principal de aprendizaje de los estudiantes del nivel, **la resolución de problemas** que, además de generar destrezas y habilidades más o

⁸³ Aportes Curriculares de Matemática de 1º y 2º año. Provincia de Río Negro. Prof. A. Ma. Bressan y A. Yaksich. 2003.

menos mecanizables, impliquen: **definir, caracterizar, clasificar, conjeturar, operar, generalizar, estimar, representar, construir, formular, validar, demostrar, etcétera.**

La investigación didáctica demuestra que, a través de la resolución de problemas, es posible desarrollar estos saberes, relevantes para el autoaprendizaje presente y futuro:

- *"saber qué es lo que se busca, ser capaz de representarse y apropiarse de la situación,*
- *ser capaz de concentrarse el tiempo suficiente y también de descentrarse, cambiar de punto de vista,*
- *ser capaz de movilizar y utilizar el recurso adecuado en el momento adecuado,*
- *guardar el registro de sus procedimientos, de organizarse, de planificar, de utilizar convenientemente la información de que dispone, ya sea dada o que sea necesario buscarla o construirla,*
- *arriesgar, probar, no tener miedo de equivocarse,*
- *poder formular, comunicar sus hipótesis, sus certidumbres, sus estrategias,*
- *ser capaz de controlar el estado de su procedimiento, medir la distancia que lo separa de la solución completa,*
- *ser capaz de validar, probar, etc." ⁸⁴ A lo que se agrega:*
- poder encontrar relaciones entre situaciones (hechos, fenómenos, ideas) en apariencia muy diferentes,
- poder mirar desde distintas perspectivas una misma situación,
- aprender de los errores propios y ajenos,
- ser capaz de usar la intuición y la creatividad.

Poder trabajar con sus pares cooperativamente en la resolución de problemas, coordinando y discutiendo acciones y resultados (formulando conjeturas, examinando consecuencias y alternativas, analizando y generalizando procedimientos y resultados, discutiendo estrategias personales, etc.), proveerá al estudiante de un pensamiento más flexible para el logro de estos saberes. Simultáneamente, llegará a asumir actitudes, sostener valores y comprender normas, que han de trascender de su vida personal a su vida social y de ciudadano responsable.

A lo largo del año (y de los años) y de acuerdo a lo expuesto, los estudiantes deberían trabajar con **distintos tipos de problemas** mediante los cuales: **construyan y signifiquen conceptos y procedimientos; reconstruyan conocimientos en contextos diferentes, investiguen, proyecten, controlen y evalúen sus aprendizajes.**

⁸⁴ Saiz, I., 1994, Resolución de Problemas. Documento Complementario. Ministerio de Cultura y Educación de la Nación. República Argentina.

En esta misma línea de trabajo, también habría que incorporar en las actividades propuestas, la creación de problemas o preguntas por parte de los estudiantes a partir de situaciones del mundo real, la identificación de datos (relevantes, necesarios, suficientes, contradictorios, etc.), e incógnitas, la interpretación de las relaciones entre ellos, la búsqueda de información confiable en caso de no disponer de la misma, la determinación de los procedimientos más económicos para la obtención de un resultado correcto, la relación entre el procedimiento y la razonabilidad del resultado en el contexto de la situación planteada, etcétera.

En la actualidad se enfatiza la importancia de los **problemas abiertos y de proyectos** en la clase de Matemática. Ambas actividades permiten poner en evidencia con mayor claridad la comprensión, razonamiento, organización, comunicación y las actitudes de los estudiantes, acercándolos más a las problemáticas de la vida real.

Los **problemas abiertos** admiten diversas formas de solución y/o diferentes respuestas. Suelen ser escasamente pautados, dan lugar a la formulación de nuevas preguntas y a la construcción de estrategias personales de resolución. Le permiten manejar su tiempo y la búsqueda de información en forma más flexible que lo que impone el trabajo habitual en el aula.

Los **problemas de proyectos** (abiertos también) parten de situaciones complejas, en las que en general se tiene en cuenta el interés del alumnado y su objetivo es que adquieran fundamentalmente una variada metodología. Resultan especialmente adecuados para conectar la Matemática a las necesidades de la vida cotidiana, de la comunidad o de otras áreas de trabajo escolar.

En un principio exigen una determinación clara de los alcances del tema y de una organización más o menos estricta en el desarrollo de los mismos. Si bien pueden estar ligados a la Matemática del año que se está aprendiendo, resulta preferible que en los comienzos los estudiantes puedan usar la Matemática que ellos ya conocen, para poder centrarse mejor en el tópico a estudiar y en los pasos metodológicos del proyecto. A medida que se avance, se podrán tratar problemas matemáticos fundamentales, referidos a los contenidos a enseñar y propuestos por los estudiantes mismos, tratando de incorporar problemáticas de distintos sectores internos y externos a la escuela.

Aprender a resolver problemas no es una tarea simple ni de un día y esto lo deben conocer los estudiantes. La historia misma de la Matemática y la biografía de matemáticos célebres les mostrarán:

- el tiempo, muchas veces centurias, que ha insumido a la humanidad la construcción de determinados conocimientos;
- el esfuerzo y la perseverancia que requiere llegar a resultados; y
- que esos resultados no siempre han sido los correctos, ni los esperados, pero que sirvieron muchas veces para clarificar el sentido de lo buscado, profundizando las comprensiones y abriendo camino a otras investigaciones y miradas renovadas de los conceptos o procedimientos utilizados.

Lo expuesto implica un cambio en el uso del problema en la enseñanza de la Matemática, lo cual constituye una verdadera revolución con respecto a la enseñanza escolar tradicional. Ya no es situar el problema sólo al final de la enseñanza, como aplicación de conocimientos previamente adquiridos ni como "motivador" de los aprendizajes, con la sola intención de captar el gusto o la curiosidad de los estudiantes. Es considerar la resolución de problemas como la forma privilegiada de enseñar y aprender Matemática y, por lo tanto, ubicarla

centralmente en todo el transcurso de este proceso, como propósito, contenido de estudio y recurso didáctico.

Otra ventaja importante de la enseñanza de la Matemática a través de problemas, la constituye el hecho de poder graduar la ayuda brindada a los estudiantes de acuerdo a sus necesidades pedagógicas y atendiendo a sus diferencias culturales, intelectuales, físicas o sociales. Los docentes han de reconocer en sus aulas la existencia de estudiantes que pueden construir una profunda comprensión conceptual de un tema particular sin requerir gran participación de su parte, en tanto que para otros, un logro similar requiere de atención específica e intensiva. No todos parten del mismo punto en sus conocimientos y posibilidades cognitivas, ni llegarán a conceptualizaciones o a dar argumentaciones del mismo nivel de abstracción, **pero todos deben poder comprender y comunicar de alguna forma los contenidos correspondientes al año.**

El tratamiento de los errores puede constituirse en una fuente de aprendizajes y base para comprender las estructuras cognitivas de los estudiantes. Socas⁸⁵ expresa que: *“El error va a tener procedencias diferentes pero, en todo caso, va a ser considerado como la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado y no como consecuencia de una falta específica de conocimiento o un despiste.”*

Si el error es considerado perjudicial por el docente, no producirá ningún efecto positivo en los estudiantes, sino todo lo contrario, como inseguridad, pérdida de confianza y también influirá en su concepción acerca de la Matemática. En cambio, si se toman los errores y preconceptos como parte de las ideas previas, se estará dando un paso importante hacia un modelo constructivista en la enseñanza de la Matemática.

La corrección sistemática del error, por parte del docente, no favorece su eliminación. Por el contrario, un camino posible se encuentra intentando que sean los mismos estudiantes quienes los perciban.

Dar lugar al error en la clase es trabajar permitiendo que descubran cuáles son las hipótesis que llevaron a producirlo; que comparen versiones de resoluciones correctas con erróneas; que reconozcan la insuficiencia de un conocimiento, etcétera.

La popularización de la enseñanza y la extensión de la obligatoriedad a mayor número de años, necesita de docentes mejor formados, que atiendan situaciones diferentes (discapacidad, diversidad cultural, sobredotados, etc.). Docentes que, utilizando variados recursos, itinerarios alternativos y refuerzos adecuados, y sin romper la convivencia en el aula, permitan realizar aprendizajes positivos en todos los estudiantes.

A su vez, resulta de especial importancia captar el interés de la familia por el aprendizaje de la Matemática, ayudándolos a desterrar sus propios prejuicios acerca de esta disciplina e informándoles sobre los cambios en su enseñanza y la posible ayuda a dar con el fin de que colaboren con la escuela en lograr mejorar el rendimiento de sus hijos.

En virtud de lo expresado, la **Planificación de la Enseñanza** deberá hacerse atendiendo a la mayor integración posible de contenidos y buscando el mayor grado de significatividad para los estudiantes. El uso de **nudos cognitivos** planteados en base a situaciones problemáticas, de dentro y fuera de la Matemática, son un buen recurso para que los estudiantes profundicen, amplíen y conecten contenidos.

⁸⁵ Socas, M.: La educación matemática en la enseñanza secundaria. Coord. Luis Rico. ICE/HORSORI. 1997. Cap. 5 p. 125. Se trató este tema en el Módulo 2: La Matemática y su enseñanza en la escuela secundaria: problemas y desafíos. Programa de Actualización Disciplinar 2007. Comisión Resolución 611/06. Consejo Pcial de Educación. pp. 35-52.

Por ejemplo, los nudos o ideas relevantes alrededor de los cuales se puede trabajar en estos años de escolaridad son (se incluyen algunos interrogantes para orientar sobre los alcances del tema):⁸⁶

- **crecimiento:** ¿Cómo crecen los seres vivos, las poblaciones, las ganancias?
- **algoritmos:** ¿Qué procesos algorítmicos usas en tu vida cotidiana? ¿Qué algoritmos usa la Matemática? Investiga y justifícalos. ¿Cómo y para qué usan los algoritmos los programadores de computación?
- **medición:** ¿Cómo determinar las medidas de...(alturas inaccesibles, distancias astronómicas, etc)?
- **relaciones de proporcionalidad:** ¿Cómo expresar a través de funciones las relaciones espacio - tiempo, lado - perímetro?
- **modelos de la Matemática** (concretos, pictóricos, simbólicos): ¿Cómo puedo expresar: qué es el cuadrado, qué es consecutivo, qué es igual, qué es función de, qué es proporcional, qué es equivalente, qué es el volumen máximo, qué es una fuerza o una velocidad, qué es el decrecimiento de una población, qué es una distancia, qué es una trayectoria, qué es cíclico, etc... en Matemática?
- **equivalencia de formas y números, patrones, formas de contar lo contable y lo incontable,** etc.

No todos los contenidos del currículo **quedarán conectados estrictamente en estos nudos**. Menos tiempo puede dedicarse al tratamiento de contenidos que no hayan quedado explícitamente vinculados, tratando de relacionarlos con temas anteriores o futuros. Siempre será posible organizar un proyecto o un nuevo nudo que obligue a vincularlos.

Tal como se menciona en párrafos anteriores, otro de los factores a tener en cuenta para la Planificación de la Enseñanza es la **diversidad**, dada por la heterogeneidad de los grupos de estudiantes con edades, culturas, capacidades, niveles y comportamientos distintos, lo cual exige el uso de metodologías diferenciadas que obliguen a los docentes, por ejemplo, a:

- utilizar diversos lenguajes,
- variar los contextos usados y
- variar las situaciones relacionales cambiando las formas de interrelación en el aula (relación docente - estudiante; estudiante - estudiantes; estudiante -computadora, etc.) (Giménez Rodríguez J., 1997).

En la Planificación se deberá prever que se consulten habitualmente libros de Matemática en las clases, aunque algunos pueden ser difíciles para los estudiantes si no están habituados al lenguaje simbólico, las expresiones coloquiales o a las gráficas. Por esta razón es importante el acompañamiento del docente. Asimismo, el uso de variados libros de texto permitirá comparar el tratamiento de diferentes temas.

⁸⁶ Las ideas de estos ejemplos fueron extraídas de los Trabajos de Integración del Programa de Actualización para la Transformación de la Escuela Secundaria. Comisión Resolución 611/06. Consejo Provincial de Educación. Pcia de Río Negro. 2007, y corresponden a los profesores citados en el ANEXO 1.

Otro instrumento a considerar en la Planificación es la carpeta de los estudiantes, ya que “es el espacio en el que se deja registro de las interacciones que se producen en la clase a propósito de un saber matemático. Tiene – o debería tener – un valor instrumental importante. Para que este valor instrumental pueda construirse, es necesario que sea el alumno quien elabore y decida cómo incluir en la carpeta los aspectos centrales del trabajo. El problema no se resolvería diciéndole al estudiante aquello que el profesor considera esencial. Lo esencial tiene que estar en la carpeta, pero elaborado por el alumno.

En muchos cursos los alumnos trabajan con una guía de trabajos prácticos, y a menudo las carpetas están llenas de respuestas a ejercicios que ni siquiera están enunciados. Éstos están resueltos sin reflexión posterior escrita, sin una discusión acerca de los errores que se pudieron haber cometido al resolverlos, sin anotaciones personales que luego faciliten el estudio. En definitiva, ese trabajo no será reutilizable. Entonces, se resolvieron muchos ejercicios, pero ¿con qué proyecto?

[...] la carpeta es muchas veces el único elemento de estudio del que disponen los alumnos. Es por lo tanto fundamental que ellos aprendan a tomar apuntes para que la carpeta se convierta en un elemento realmente útil. Pero, para que esto suceda, hay que plantear actividades que les permitan valorar la función de la carpeta y mejorar los registros de lo que se realiza en clase.⁸⁷

Finalmente, el uso de la **tecnología** (calculadoras numéricas y gráficas, computadoras, internet, software, videos, etc.) abre un campo a la creatividad e investigación de los docentes para integrarla a sus prácticas de enseñanza, y hace pensar en un estilo de trabajo que la considere generadora de conceptos y de reflexión constante, promoviendo procedimientos y actitudes abiertas.

A su vez, los estudiantes usarán estos recursos para procesar información, visualizar y resolver problemas, explorar y comprobar conjeturas, acceder a información y verificar soluciones.

Se menciona especialmente a las calculadoras, ampliamente utilizadas en los hogares y en los lugares de trabajo, ya que la escuela debiera asegurar que los estudiantes la usen apropiadamente, al mismo tiempo que la utilizan como recurso para el aprendizaje de contenidos matemáticos. Algunas actividades interesantes con la calculadora son:

- el control de resultados y el ahorro de tiempo cuando los números son muy grandes o se complican las operaciones,
- el cálculo estimativo,
- la búsqueda de regularidades,
- la ejemplificación variada y abundante de propiedades y reglas,
- la curiosidad a través de actividades y juegos relacionados con la probabilidad,
- el cálculo combinatorio y de parámetros estadísticos, analizando las funciones específicas que cada modelo de calculadora pudiera tener.

⁸⁷ Documento Nº 2: Apoyo a los alumnos de primer año en los inicios del nivel medio. Dirección General de Planeamiento. Subsecretaría de Educación. Secretaría de Educación. Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. 2005. p.13.

La Modelización

Muchos autores coinciden en describir la Matemática como una actividad de modelización, a partir del reconocimiento de una determinada problemática.

En realidad, la ciencia utiliza los modelos desde la representación casi figurativa hasta el establecimiento de relaciones entre conceptos de un alto grado de abstracción, como la que brinda la Matemática.

En general se puede decir que un modelo es una esquematización abstracta de la realidad, entendiéndose que ésta puede pertenecer al mundo de los fenómenos materiales o al de los conceptos.

La Matemática, que se ha venido desarrollando históricamente, no sólo está motorizada por los problemas ajenos a ella sino principalmente, por problemas intramatemáticos cuya solución ha sido fuente de nuevos problemas, que también son objetos de modelización.

Los modelos matemáticos son estructuras que describen de manera aproximada el funcionamiento de cierta realidad. *“Muy sucintamente diremos que un proceso de modelización supone en primer lugar recortar una cierta problemática frente a una realidad generalmente compleja en la que intervienen muchos más elementos de los que uno va a considerar, identificar un conjunto de variables sobre dicha problemática, producir relaciones pertinentes entre las variables tomadas en cuenta y transformar esas relaciones utilizando algún sistema teórico matemático, con el objetivo de producir conocimientos nuevos sobre la problemática que se estudia. Reconocer una problemática, elegir una teoría para “tratarla” y producir conocimiento nuevos sobre dicha problemática, son tres aspectos esenciales del proceso de modelización. La reflexión sobre los problemas puede dar lugar a la formulación de conjeturas, a la identificación de propiedades que podrán – o no- reformularse en organizaciones teóricas que funcionen más o menos descontextualizadas de los problemas que les dieron origen.”*⁸⁸

Como también la actividad matemática consiste en la utilización de modelos, lo que se hace es desarrollarlos y aplicarlos a diferentes realidades concretas. La creación en la Matemática implica la creación o reformulación de nuevos modelos.

En la enseñanza, la idea de modelización contribuye a tener una visión más integrada de la actividad matemática, a resaltar el valor educativo de la disciplina ofreciendo la posibilidad de actuar sobre una parte de la realidad a través de la teoría e integrando también la idea de producción de conocimiento.

La demostración

En Matemática, demostrar o deducir implica el uso de un razonamiento lógico riguroso que, partiendo de ciertas premisas o hipótesis (verdaderas), permite arribar a una conclusión verdadera y que por lo general es un nuevo conocimiento.

Desde una concepción tradicional absolutista o justificacionista de la Matemática, la deducción es el proceso de razonamiento único y privilegiado al que debiera apuntar su enseñanza en el nivel medio.

En general, en la enseñanza en este nivel, llevar al alumnado hacia procesos de abstracción ha estado asociado a realizar demostraciones y, debido a las dificultades y al tiempo que

⁸⁸ Informe final de la Comisión Nacional para el mejoramiento de la enseñanza de las Ciencias Naturales y la Matemática. Agosto de 2007. Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología.

esto implica, el trabajo escolar usual ha sido el de “mostrar demostraciones”, pensando que así los estudiantes aprenderían a demostrar.

También es muy común la selección de demostraciones por parte del docente, considerando que los estudiantes sólo podrán interpretar algunas y pensando que estos procesos son casi mágicos y al alcance de unos pocos; desaprovechando así muchas de las situaciones en que ellos inician naturalmente procesos de demostración por cuenta propia.

Además, como es común unir el concepto de demostración al de formalización (pensado como la utilización del lenguaje simbólico con el más alto grado de esquematización y rigor), se exige que los estudiantes expresen su razonamiento de la forma más económica y elegante (matemáticamente hablando), usando notaciones y procedimientos estandarizados.

Estas posiciones, que atienden más a la forma o presentación que al razonamiento propiamente dicho, han conducido a muchos estudiantes a fracasos y a un desánimo en sus posibilidades de lograr aprender Matemática y a que, actualmente, para evitar esto, haya poca exigencia de prueba y demostración en las clases.

Un enfoque más socio - antropológico, basado en atender a todos los procesos que encierra el quehacer matemático, considera otras formas de razonar y probar. Son los procesos implicados en la construcción del conocimiento científico y que, por ejemplo, se evidencian al formular afirmaciones justificadas, reconocer, dar sentido e interpretar explicaciones de otros, diseñar nuevas y, en algunos casos, formalizar (si cabe algebraica, funcional o geométricamente) dichas acciones o textos.

Dice Joaquín Jiménez⁸⁹: *“El hecho de que no se ha sabido cómo conseguir que nuestros estudiantes sepan probar en matemática puede explicarse porque se ha enfatizado la acumulación de hechos y reglas lógicas por encima de la provocación de razonamientos. Así, ahora, argumentar, convencer e interpretar podrían interpretarse como modas que aparecen para conseguir mejorar la situación, pero con ello se ha olvidado que recientemente pasamos por una crisis en lo que significa científicamente el valor de la certeza. Durante mucho tiempo se ha dicho que los alumnos y las alumnas no tienen capacidad de probar, con lo que se ha desfocalizado el problema sobre lo que debe hacerse en la escuela: utilizar procesos de reducción de la realidad (llamado por algunos matematización horizontal) y provocar razonamientos como estilo de acción (pensar matemáticamente en forma vertical). Si estas dos acciones son significativas, se pueden plantear conjeturas y hacer sentir la necesidad de pruebas.”*

Desde este punto de vista la enseñanza de la Matemática en estos años de la escolaridad secundaria, deberá instar al estudiante a que aprenda a intuir, plantear generalizaciones e hipótesis simples en base a la observación, experiencia e intuición, buscar regularidades en un conjunto dado, diferenciar entre razonamientos inductivos y deductivos distinguiendo entre conjetura y demostración y, si es posible, demostrar sin exigencias de formalización extrema y sin pretender que el estudiante se mueva dentro de un marco axiomático riguroso.

⁸⁹ Jiménez, J. Probando a razonar y razonando sobre pruebas. Revista UNO N° 28. 2001. p. 7. Se hace notar que este autor toma términos de Freudenthal donde la **Matematización horizontal (MH)** implica el uso de la intuición, sentido común, aproximación empírica, observación, experimentación inductiva. Las herramientas matemáticas que se poseen son traídas y usadas para organizar y resolver un problema situado en la vida diaria. Va del mundo de la vida al mundo de los símbolos. En cambio, la **Matematización vertical (MV)**, usa la reflexión, esquematización, generalización, prueba, simbolización y rigorización. Al contrario de la **MH**, se basa en todas las clases de reorganizaciones y operaciones hechas por los estudiantes en el sistema matemático mismo. Se mueve dentro del mundo de los símbolos.

Freudenthal, H. (1991)*,*/Revisiting Mathematics Education: //China// Lectures./Dordrecht: Kluwer.p101

Problemáticas interdisciplinarias

Los espacios para el trabajo interdisciplinar son de real importancia para que los estudiantes establezcan conexiones de la Matemática con otras disciplinas y la vida real, y capten su potencia para modelizar y resolver problemas de las mismas. Los nudos cognitivos, temáticas o problemáticas planteadas para desarrollar en ellos, demandarán para su tratamiento el diálogo de saberes que *“implica una actitud abierta a aprender del otro, el reconocimiento de que el otro tiene algo que enseñar, y viceversa...El diálogo de saberes necesita y está promoviendo hoy el rescate de la legitimidad de esos saberes vinculados a la cotidianeidad, incluido el hombre común, sus conocimientos, valores y creencias.”* (Sotolongo, 2006:72).⁹⁰

Además de los nudos cognitivos de carácter disciplinar, se podrán desarrollar otros vinculados con los espacios curriculares de las Orientaciones correspondientes.

Finalmente, el trabajo así planteado podrá trascender hacia la comunidad y aportar a la clarificación y solución de algunas de sus problemáticas que no pueden ser abarcadas desde una sola disciplina. En estos espacios interdisciplinarios se deberá atender:

- al uso de la Matemática que el estudiante debe conocer,
- a cumplimentar propósitos relevantes de todas las disciplinas que intervengan,
- a la evaluación desde la perspectiva de cada una de las disciplinas intervinientes.

Es conveniente que, a lo largo del tiempo se incentive la reflexión de los estudiantes sobre las actividades realizadas y sobre lo que ellos sienten que han aprendido con ellas, con criterio de autoevaluación.

2.4. Evaluación

En concordancia con lo expresado en el Marco General de este Diseño y en función de lo expuesto anteriormente, se deduce una concepción de evaluación dirigida a tener en cuenta la comprensión y el proceder de los estudiantes más que el control puro de sus destrezas matemáticas; sin con esto querer descuidar este aspecto.

Recordar definiciones, aplicar reglas, usar vocabulario y escrituras convencionales con eficiencia, no aportan datos suficientes sobre la manera en que los estudiantes comprenden los conceptos y procedimientos relacionados con las actividades. Lo que brinda más datos al respecto es el análisis de la lógica que explica sus aciertos y sus errores significativos y sistemáticos. El estudio de las estrategias personales en la resolución de problemas y la explicación y defensa que hagan de las mismas, darán al docente (y a él mismo), los mejores datos acerca del nivel de conceptualización matemática y de las competencias metodológicas que poseen.

La evaluación forma parte del proceso de enseñanza y aprendizaje y debe estar siempre presente. No puede ser considerada como un instrumento ajeno a dicho proceso y agregado al final de una etapa del mismo.

A esta forma de evaluación continua y permanente, el docente ha de agregar instrumentos, además de la resolución de problemas, para recabar datos sobre la adquisición individual, real y eficaz que cada estudiante haya hecho de los contenidos trabajados en un determinado tiempo y sobre su metodología de trabajo. Ellos podrán ser: la observación

⁹⁰ Módulo 3. Programa de Actualización para la Transformación de la Escuela Secundaria. Comisión Resolución 611/06. Consejo Provincial de Educación. Pcia de Río Negro. 2007.

sistemática y el registro del trabajo individual y grupal, las fichas de trabajo, las carpetas, los trabajos interdisciplinarios, las pruebas escritas y orales, etcétera.

Especialmente importante es que el docente comprenda que evaluar el trabajo de sus estudiantes no es evaluar al estudiante para juzgarlo, encasillándolo en estereotipos que no permitan considerar sus aprendizajes reales, sino que se deben diagnosticar sus problemas y carencias, ayudándolo a superar los obstáculos que se oponen a su progresión en esos aprendizajes.

La autoevaluación cumple un papel relevante en la formación de estudiantes autónomos y con capacidad para continuar aprendiendo por sí mismos, a la vez que orienta al profesor en el reconocimiento de sus propias prácticas y sobre los marcos interpretativos de sus estudiantes, para desde allí generar cambios.⁹¹

En este marco, no es sólo el estudiante el que debe evaluarse y ser evaluado. El docente mismo debe involucrarse en este proceso tornando su propia práctica en objeto de evaluación. En los aprendizajes de los estudiantes se suelen reflejar su preparación disciplinar y didáctica, y su compromiso con la tarea.

Para la **Planificación de la Evaluación**, es necesario establecer: el propósito, el contenido / saber a evaluar, los instrumentos, la situación en la que se llevará a cabo (espontánea, planeada, grupal, individual, etc.), los criterios de valoración de los datos obtenidos, el uso de esos datos y la devolución de la información obtenida.

En esta Planificación ha de atenderse a: la justicia (que asegura la no discriminación de individuos o grupos), la equidad (que busca ofrecer oportunidades apropiadas para cada estudiante) y la transparencia (que asegura la información clara a estudiantes, institución y padres).

El acuerdo en los propósitos y métodos con otros colegas, la confección de instrumentos en forma conjunta, su prueba en diversos grupos, la valoración por separado, el contraste de esas valoraciones y de los criterios de evaluación utilizados, pueden constituir un buen camino para mejorar las prácticas de evaluación otorgándoles confiabilidad, validez y equidad.⁹²

Los **Lineamientos de Acreditación de 4º y 5º año** que se detallan a continuación de los cuadros de contenidos están relacionados con los propósitos, y han de ser considerados como criterios orientadores de los saberes que los estudiantes deberán haber logrado, al finalizar cada uno de los dos años de este Ciclo Orientado de la escolaridad secundaria.

En algunos casos, los enunciados para uno y otro año son muy similares, o iguales, pero se diferencian en los saberes o el nivel de profundidad alcanzado en cada año. Por eso, el alcance de los mismos deberá completarse con la lectura de los Cuadros de Contenidos.

⁹¹ Camilloni A. et al. 1998. La evaluación de los aprendizajes en el debate didáctico contemporáneo. Argentina. Paidós Educador.

⁹² Desarrollo Curricular E.G.B. 1 y 2. La Evaluación en Matemática. Enfoques Actuales. Ministerio de Educación y Cultura. Dirección de Gestión Curricular. Provincia de Río Negro. 2001.pp. 7-9: [...] *la concepción clásica de confiabilidad de una evaluación se asienta sobre la consistencia o estabilidad de sus resultados a lo largo del tiempo. Si posee alta confiabilidad indica que en la asignación de los puntajes se usan los mismos criterios para evaluar, con independencia del evaluador y los tiempos de evaluación.*

[...] *El grado de validez de una evaluación está dado según provea información que es relevante y adecuada para el propósito propuesto.*

[...] *La condición de equidad garantiza que ofrece oportunidades igualmente apropiadas para que cada estudiante demuestre el valor de su proceso de pensamiento, conocimientos y habilidades.*

En el encabezamiento de los Lineamientos se lee: “*Resolver situaciones que impliquen...*” porque el tratamiento de los saberes deberá hacerse a través de la resolución de problemas.

Los **Lineamientos de Acreditación** dan cuenta de los aprendizajes básicos para cada año del nivel. En algunos casos, se ha postergado la acreditación de ciertos saberes, por considerar que al iniciarse su tratamiento recién en ese año, resulta prematuro incluirlos.

3. Organización de los contenidos

El currículo de Matemática para 4º y 5º año se ha estructurado alrededor de un eje organizador que orienta la concepción de la disciplina.

Eje organizador: El o los modos de razonamiento y el lenguaje de la matemática permiten al estudiante interpretar, representar, explicar, predecir y resolver, tanto situaciones de la vida cotidiana como del mundo natural y social en que vive, para poder integrarse racional y activamente en el mismo y así colaborar en su transformación positiva.

La organización de los contenidos se ha realizado en ejes temáticos y se ha considerado un eje transversal referido a las actitudes en la enseñanza de la Matemática.

Las actitudes deben ser trabajadas simultáneamente con los contenidos específicos de cada eje temático, ya que se han tratado de incorporar en los mismos y en otros componentes del diseño, como la Fundamentación, los Propósitos, la Metodología y los Lineamientos de Acreditación.

En esta organización de los contenidos se han incluido también, consideraciones respecto de los ejes temáticos propuestos y los cuadros de alcance de los mismos, organizados por eje y año.

Los ejes correspondientes a estos años de estudio son:

Eje transversal: Actitudes en la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática

Ejes temáticos: Número y Operaciones

Funciones y Álgebra

Álgebra y Geometría

Estadística y Probabilidades

Estos ejes no constituyen unidades aisladas ni secuenciadas, ya que la estructura interna del conocimiento matemático es esencialmente interconectada. Por otro lado, el proceso cognitivo de construcción de la Matemática obliga a volver periódicamente sobre los mismos temas con niveles de complejidad, abstracción y formalización crecientes.

Algunos de los temas ya han sido tratados en el Diseño Curricular del Ciclo Básico, retomándose ahora para profundizarlos y resignificarlos en este ciclo y en todas las Orientaciones, para que los estudiantes puedan acceder a un mayor nivel de sistematización, integración y abstracción en lo conceptual y metodológico. De acuerdo a la Orientación, tendrá que priorizarse el tratamiento de algunos de ellos.

En los cuadros de contenidos específicos por eje temático:

- los saberes / contenidos están escritos en letra normal y, en cursiva, las recomendaciones para la enseñanza de algunos de ellos.
- la lectura horizontal indica la progresión sugerida para la enseñanza de los mismos en los dos años, entendiéndose que los contenidos de un año presuponen la adquisición de los correspondientes al año anterior. La complejidad en el trabajo de

un año a otro puede variar integrándose otros contextos de uso, cambiando sus marcos de referencia (aritméticos, geométricos, algebraicos, etc.), el lenguaje (gráfico, simbólico) o la formalización (por ejemplo, los tipos de prueba).

- la lectura vertical de cada año da cuenta de los saberes del eje que deberán ser desarrollados en el mismo y **no constituyen una secuencia didáctica**. Corresponde al docente elegir los contenidos de cada eje que considere adecuados para organizar su enseñanza, previendo la selección de situaciones que favorezcan su integración en el marco de una Planificación institucional consensuada.

En este sentido, será oportuno que cada profesor se cuestione continuamente si la enseñanza de la Matemática que adopta, favorece integralmente una formación ética y ciudadana, propedéutica y de formación para la vida productiva.

La forma de presentación de los contenidos no constituye una secuencia didáctica, ni supone una jerarquización de los mismos, ya que es difícil imaginar un aprendizaje así organizado. Es por esto que, aunque es imprescindible elegir un cierto orden para el abordaje de los contenidos, éste no coincidirá con el desarrollo que se haga de los temas ya que mayormente deberán trabajarse en forma integrada, conectando conceptos análogos aunque estén alejados en el ordenamiento establecido. Por ejemplo: el uso de la raíz cuadrada, el teorema de Pitágoras, la distancia entre dos puntos, entre otros.

El aprendizaje de cada concepto se va completando y perfeccionando a través de sucesivas aproximaciones, cada vez más profundas, desde distintas perspectivas y contextos, en diferentes oportunidades y en la medida en que el desarrollo intelectual del estudiante así lo permita.

ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE LOS EJES

Se presentan sugerencias que orientan la selección de las estrategias de enseñanza por parte de los docentes; esperando que en las aulas las experiencias formativas se organicen apelando a diferentes formatos que contemplen los aportes de la didáctica de la matemática, con el fin de dinamizar los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

Eje transversal: Actitudes en la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática

En esta propuesta curricular, se continúa con la idea sustentada en el Ciclo Básico de que lo enseñado tenga una carga formativa importante, ya que también los estudiantes establecen jerarquías de valores, formulan juicios morales, adoptan posturas éticas y asumen compromisos sociales.

Tomar las actitudes como contenidos implica asumirlas como pasibles de ser enseñadas, y no como saberes previos ya disponibles y exigibles o como condición de posibilidad para el trabajo en el aula. En este sentido, se piensa que no pueden ser consideradas por separado, ya que cuando un estudiante aprende conceptos de matemática, también por ejemplo, desarrolla actitudes de gusto, disgusto, interés, rechazo, rigor, etc., y ello ocurre así, aun cuando no haya sido previsto.

Sin embargo, que no se las pueda considerar en forma separada de los contenidos de matemática, no quiere decir que no se puedan especificar, como se hace en este caso, con el fin de que su tratamiento no dependa exclusivamente de procesos espontáneos, sino que se incluyan intencionalmente en la planificación, con el propósito de conseguir los fines educativos propuestos en el marco de la escuela.

“La moralidad personal no se define sólo por la asimilación de unas normas y convenciones externas sino también por la creación de estructuras de relación y valoración que nacen de las experiencias de interacción social.

En este sentido, la observación, la contrastación, la comparación y la imitación son actuaciones base para el tratamiento de valores, actitudes y normas. A partir de lo que la persona ya conoce y de la organización que posee de la propia experiencia, toma conciencia de ellos paulatinamente y los identifica, diferencia, tolera, apropia y valora. Finalmente, los interioriza siempre que subsistan las necesidades y motivaciones que están en la base del proceso.

De ese modo, pueden contar más la profundidad y claridad general de las relaciones y reflexiones efectuadas al respecto que las experiencias concretas de castigo o recompensa, sin que ello suponga menospreciar la influencia de estas últimas.”⁹³

Las posibilidades formativas de todo conocimiento deberían considerarse abiertas a esta dimensión de lo actitudinal, haciendo hincapié en la coherencia entre lo que se dice y lo que se hace. No se trata de recitar un decálogo de valores sino de promover el tratamiento de los mismos, para lo que es necesario tener - valga la redundancia - la actitud correspondiente.

Si, por ejemplo, se propone enseñar Matemática promoviendo el uso de estrategias personales de resolución, la elaboración de preguntas a partir de un conjunto de datos, la búsqueda de regularidades, la formulación de argumentaciones lógicas que avalen o desapruében razonamientos o la toma de decisiones, etc., de ningún modo puede llevarse a cabo sobre la base de una Matemática descontextualizada, abstracta, universal e inmutable, que asocie el saber al docente como único y certero portador. Tendrá más sentido si se promueven actitudes de interés y curiosidad por el conocimiento, la autonomía, la tolerancia frente a los errores y logros; y valores, como el respeto por las ideas diferentes y la convivencia.

Se incluyen en el eje las actitudes más afines con el objeto de conocimiento a enseñar, incorporándolas, a su vez, en otros apartados. Pero cabe a la institución escolar y al docente, seleccionar las actitudes y valores que espera alentar en sus estudiantes. Sus propias actitudes hacia la Matemática y su pensamiento acerca de qué es, para qué sirve y cómo se aprende constituyen factores decisivos que pueden facilitar o bloquear el aprendizaje global de esta disciplina.

El proceso de conformación o transformación de una actitud es lento y complejo; es por eso que se puede restringir la cantidad de actitudes sobre las cuales focalizar la enseñanza en cada año, además de secuenciarlas en los dos años; comenzando por las que sean de adquisición inmediata y postergando la enseñanza y la reflexión de aquéllas para las cuales se necesita haber contado con más oportunidades y experiencias en cuyo contexto vivenciarlas.

Estos saberes, por cierto no tratados en forma exhaustiva y que comparten el carácter de transversalidad por sobre todos los demás ejes de la Matemática, han sido organizados en tres categorías relacionadas con:

- **La propia persona**, donde se agrupan las actitudes y valoraciones vinculadas con la autoestima y posibilidades de control personal del conocimiento matemático.

⁹³ Gómez Alemany, I. y Mauri Majós, T. De la Escola de Mostros de Sant Cugat. Universitat Autònoma de Barcelona. 1992.

- **El conocimiento, su forma de producción y comunicación**, donde convergen las actitudes y valoraciones que el estudiante pueda ir desarrollando en relación con la Matemática, su método y su lenguaje.
- **La sociedad**, donde, sin lugar a duda, una buena enseñanza de la Matemática colabora a incrementar la cultura de una sociedad democrática formando al estudiante en la discusión productiva, en la toma de decisiones pertinentes y en la seguridad de que el juicio ha de primar sobre la fuerza.

Ejes temáticos

Número y Operaciones

En este Nivel, este eje – uno de los de mayor alcance en los niveles precedentes – más que un eje en sí mismo, es una herramienta que se despliega en la dinámica de desarrollo de los demás.

Se consideran los conjuntos numéricos junto con las operaciones, sin que esto condicione a su vez, la necesidad de un trabajo integrado con los ejes restantes.

Para su tratamiento, si bien no se dejarán de lado las razones prácticas que dieron lugar al surgimiento de los distintos números, corresponde hacer una fundamentación de los conjuntos numéricos en base a las razones de orden matemático que dieron origen a los mismos. Por ejemplo, los números complejos como solución de las ecuaciones de la forma $x^2 + 1 = 0$

En los primeros años del Ciclo Básico los estudiantes han tomado conciencia de la existencia de los números irracionales (como expresiones decimales no periódicas), partiendo del estudio de la periodicidad de la expresión decimal de los números racionales, así como del cálculo de la longitud de la diagonal de un cuadrado, por ejemplo de lado 1; de la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro; del cálculo de la relación entre un lado y la diagonal de un pentágono, los rectángulos áureos o de algún ejemplo de la teoría de probabilidades.

En esta etapa, se profundizará el estudio de estos números con ejemplos diversos, sobre todo de aquéllos que, por razones históricas, culturales o científicas, han ganado notoriedad:

π , e (número de Neper), $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, los números metálicos⁹⁴ (número de oro: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; número

de plata: $1 + \sqrt{2}$; número de bronce: $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$; etc.). También los que surgen de desarrollos

decimales infinitos y en los cuales existe una regla que continúa su construcción, haciendo

⁹⁴ Del Cap. 2: La familia de los números metálicos y su hijo pródigo: el número de oro. Condese, V. y Minnaard, C. "Los números metálicos aparecen tanto en los sistemas usados en el diseño de las construcciones por la civilización romana hasta los más recientes trabajos de caracterización de caminos universales al caos (Spinadel, 1995).

[...] ¿Cuáles son algunas de las características de estos números?

1. Son todos irracionales cuadráticos, lo que implica ser solución de una ecuación cuadrática.

2. Son todos límites de sucesiones de Fibonacci.

3. Se pueden descomponer en fracciones continuas.

[...] Si planteamos la ecuación cuadrática $x^2 - bx - 1 = 0$ para distintos valores enteros de b , un alumno de nivel medio encontrará en su solución algunos números metálicos."

Abrate, R. y Pochulu, M. (comps). Experiencias, propuestas y reflexiones para la clase de matemática. Ed. Universidad Nacional de Villa María. Pcia de Córdoba. 2007. p. 41,45.

aproximaciones (por defecto y por exceso) o realizando cálculos de medidas en forma exacta; representándolos sobre la recta numérica y consolidando la idea de que queda *completa* con esta última incorporación (no hay puntos libres a los que se les pueda asignar algún nuevo número); y estableciendo otras propiedades del conjunto de los números reales.

Se trabajará con subconjuntos de números reales, expresados de acuerdo con alguna relación de orden (por ejemplo “*los números reales mayores que -3 y menores o iguales que 3*”) analizando cómo se simbolizan y representan estos subconjuntos. También se tratará la idea de módulo o valor absoluto de un número real como la distancia entre dicho número y cero, aplicando dicho concepto y las propiedades en la resolución de problemas.

Un desafío para los docentes es presentar una enseñanza de la Matemática integrada con la historia y la cultura.

Tal como sostienen Abrate y Pochulu⁹⁵ “*Creemos que muchas veces el modo en que se enseña Matemática dificulta que se comprenda la relevancia del tema, que se entiendan los obstáculos del pasado y que se adquiera real sentido, al menos en parte, para muchos de nuestros alumnos. Enseñar contenidos matemáticos desprovistos de su historia suele acarrear el inconveniente de que pueden ser concebidos por los alumnos como algo artificioso y arbitrario de esta ciencia. La perspectiva histórica no sólo permite conocer cómo se crearon y construyeron los conceptos y las teorías que hoy manejamos, producto de un trabajo acumulativo, sino también, faculta para comparar técnicas y métodos actuales con otros que se utilizaron en el pasado. Así, el quehacer matemático se torna valioso al poner de manifiesto que un mismo problema se resolvió de maneras diferentes en distintas épocas.*”

Cuando se conocen en la historia, los obstáculos y dificultades que tuvieron los hombres alrededor de, por ejemplo, el número complejo, se admiten como más lógicas las dificultades colectivas de familiarización con tal concepto. En este nivel, su estudio se circunscribirá a su composición y a sus representaciones gráficas.

Se ampliarán y profundizarán las operaciones inversas de la potenciación de base real y exponente entero, que no pueden definirse mediante los elementos inversos. La radicación y la logaritmación surgen de los problemas que se plantean cuando se desea hallar la base o el exponente de una potencia.

En las clases se resolverán situaciones problemáticas que involucren a los números reales, principalmente radicales, seleccionando y generando diversas estrategias, estimando y verificando procedimientos y resultados; analizando la validez de los razonamientos y elaborando argumentos que los justifiquen.

Es necesario apartarse del tratamiento tradicional de los logaritmos, reducidos generalmente a una aplicación algorítmica y descontextualizada, mostrándolos sin ningún antecedente analítico. Citando nuevamente a Abrate y Pochulu⁹⁶: “*En este sentido, acordamos con Lefort (2001) pues sostiene que aunque esta introducción sea matemáticamente satisfactoria, se halla bastante lejos de ser evidente para los estudiantes y su propiedad fundamental queda oculta. Además, el problema histórico que llevó a concebir los logaritmos también estaría ausente...*”

⁹⁵ Abrate, R. y Pochulu, M. (comps). Op.cit. Cap. 6: Los logaritmos, un abordaje desde la Historia de la Matemática y las aplicaciones actuales. Ed. Universidad Nacional de Villa María. Pcia de Córdoba. 2007.p. 112.

⁹⁶ Abrate, R. y Pochulu, M. (comps). Op.cit. p.112.

Se continuará con el tratamiento continuo y equilibrado de las sucesiones numéricas, propiciado durante todo el Ciclo Básico, presentando situaciones que den lugar a ellas. Se deberán incluir las siguientes representaciones: expresiones verbales que establecen una dependencia de variable natural; tablas numéricas o primeros términos de la sucesión; representaciones gráficas, y notación simbólica o expresión del término general de una sucesión. Es importante mantener una secuenciación que, partiendo de lo intuitivo, apele a mayores niveles de razonamiento, yendo de las sucesiones lineales y afines (progresiones aritméticas) a las exponenciales (progresiones geométricas), como así también continuar el estudio de otras sucesiones y sus propiedades; tal es el caso de la sucesión de los números primos (el polinomio $p(n) = n^2 - n + 41$, que genera sólo números primos si se hace variar n desde 1 hasta 40) o la sucesión de Fibonacci.

Otra sucesión interesante es la que se plantea, como por ejemplo, a partir de la siguiente secuencia de números: 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ..., ⁹⁷ en la que, a simple vista, parece que no existe un patrón.

Sin embargo, observada con más detenimiento, se nota que los últimos términos 4, 2, 1, se repiten (y los puntos suspensivos indican que lo siguen haciendo indefinidamente). El patrón que se representa mediante la fórmula de recurrencia es:

$$a_{n+1} = \begin{cases} 3a_n + 1 & \text{si } a_n \text{ es impar y } a_1 = 34 \text{ (número inicial)} \\ \frac{a_n}{2} & \text{si } a_n \text{ es par} \end{cases}$$

En el caso general, $a_1 = k$, es el número seleccionado inicialmente.

Lo interesante de este ejemplo es que, comenzando con cualquier número (en este caso 34) y aplicando el patrón dado, esta sucesión siempre terminará comportándose igual: caerá indefectiblemente en el ciclo 4, 2, 1. La sospecha generalizada es que esto es así y se ha comprobado su veracidad para números muy grandes con computadora. Si bien no existe ninguna demostración que lo garantice, tampoco se ha encontrado ningún contraejemplo que lo refute. Este problema se conoce como conjetura $3n + 1$.

Otros ejemplos provenientes de diversos contextos pueden ser planteados, tales como el crecimiento de las poblaciones, situaciones vinculadas con las finanzas, con la música, con la recreación ⁹⁸ o con la geometría de los fractales (triángulo o fractal de Sierpinski, copo de nieve o fractal de von Koch).

Las sucesiones tienen diversas propiedades que pueden ser analizadas con los estudiantes, pudiendo tratar a través de ellas la noción de límite y facilitando el estudio del límite de las funciones. Algunas son crecientes, ya sea en forma lineal, exponencial o de otra manera y “tienden a infinito”; otras son decrecientes y “tienden hacia algún número”. En cambio, otras

⁹⁷ El ejemplo fue tomado de la Colección en Fascículos: El mundo de la matemática. Fascículo 1: Introducción al Mundo de la Matemática. Fundación Polar y el diario Últimas Noticias. Venezuela. 2004.

⁹⁸ Se citan dos ejemplos: - la leyenda sobre la invención del juego de ajedrez: un rey, fascinado por lo interesante del juego, quiso premiar al inventor, un sacerdote hindú llamado Sessa, ofreciéndole lo que quisiera, quien le contestó que se conformaba con un grano de trigo por la primera casilla del tablero, dos por la segunda, cuatro por la tercera, ocho por la cuarta, y así doblando la cantidad hasta la casilla 64 del tablero de ajedrez; y - las Torres de Hanoi; es un juego matemático inventado en 1883 por el matemático francés François Édouard Lucas Anatole. Se trata de un juego de ocho discos de radio creciente que se apilan insertándose en una de las tres estacas de un tablero. El objetivo del juego es crear la pila en otra de las estacas siguiendo unas ciertas reglas. El problema es conocido y aparece en muchos libros de texto como introducción a la teoría de algoritmos.

siendo crecientes toman valores que no superan determinado número (se denominan sucesiones acotadas superiormente). También hay sucesiones oscilantes, por ejemplo, la de término general $(-1)^n$; las sucesiones periódicas, entre otras.

Funciones y Álgebra

Teniendo en cuenta que el mundo físico puede modelizarse a través de los conocimientos matemáticos, es necesario profundizar el estudio de las funciones. Este concepto que se viene construyendo desde años anteriores, tiene una gran aplicación, a través de las funciones algebraicas, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, etcétera.

Los estudiantes deberán apreciar el poder de las funciones para describir en forma simple situaciones complejas y para predecir resultados, ya que este tema es aplicado no solamente en otras ramas de la Matemática sino también en otros campos de conocimiento, como las Ciencias Sociales y Biológicas, Economía, Astronomía, Ingeniería, etc.; teniendo además una gran ingerencia en la descripción de los fenómenos físicos.

Las funciones podrán estudiarse a partir de la modelización de fenómenos del mundo real. En la naturaleza los crecimientos y los decrecimientos poblacionales (de seres humanos, de bacterias, de langostas, de tumores) tienden a comportarse, durante cierto periodo y en ciertas condiciones, como funciones exponenciales (donde el valor de la base es el número irracional e , base de los logaritmos naturales). También se manifiesta cuando se investiga la desintegración de una sustancia radioactiva o cuando se necesita establecer el interés compuesto que genera un capital determinado. La función logarítmica se aplica en la escala Richter para establecer la magnitud de un sismo, en la acústica, en la determinación del pH de una solución, etc. A su vez, las escalas logarítmicas son más ventajosas para llevar a cabo representaciones de funciones de diversas áreas, en un rango de variabilidad muy grande.

Las funciones trigonométricas se retomarán desde las razones trigonométricas tratadas en el Ciclo Básico, con situaciones problemáticas más complejas de cálculo de distancias y ángulos, involucrando la necesidad de usar fórmulas, haciendo las demostraciones de las mismas, cuando sea posible, y destacando la validez de las demostraciones geométricas siempre que sea conveniente.

Estas funciones son utilizadas actualmente para realizar modelos de fenómenos que son periódicos, al menos en forma aproximada. Por ejemplo, el día y la noche, las mareas, las fases de la luna, los latidos del corazón, el movimiento de las cuerdas de un instrumento, la luz, entre otros; resultando evidente que, para cada fenómeno, el conocimiento de la duración de un ciclo es decisivo para hacer predicciones, aun si son cambiantes. Algunas veces, esto podrá hacerse con precisión pero, en general, sólo se determinará de un modo aproximado, sobre todo en fenómenos relacionados con lo social.

Asimismo, se tratarán algunas identidades trigonométricas que ejemplifiquen relaciones entre funciones.

Es fundamental incorporar en el tratamiento del tema todos los registros en los cuales se expresa el concepto de función, entre ellos: tablas, gráficos, diagramas, fórmulas algebraicas, descripciones coloquiales, dibujos de la situación. Cada una de estas representaciones permite expresar un fenómeno de cambio (razón de cambio constante, razón de cambio variable de un intervalo a otro), y una dependencia entre variables. Los registros de mayor abstracción y, por lo tanto, más difíciles de interpretar son el gráfico y el algebraico, pero a su vez son los que permiten tener una visión general y completa de la función estudiada, tanto cualitativa como cuantitativamente (aproximada en el caso gráfico),

brindando mayor y mejor información que los registros anteriores y, al mismo tiempo, dando lugar a la caracterización de modelos.

El gráfico permite observar características tales como, variaciones y periodos constantes, crecimiento, continuidad, concavidad, máximos y mínimos, asíntotas, etc.; que también se pueden determinar desde la ecuación (cuando la misma se puede obtener a través de métodos elementales). Si bien la ecuación es más difícil de interpretar, ya que su determinación a partir del lenguaje algebraico presupone, el conocimiento de los símbolos utilizados y la interpretación a través de ellos de conceptos abstractos, se puede intuir más fácilmente con la gráfica.

Justamente, **una consideración especial merece el tratamiento del lenguaje gráfico en todos los ejes**, ya que, por un lado, con su uso cobra fuerza la conexión de ideas provenientes desde distintas temáticas; y por el otro, forma parte del lenguaje común en la mayor parte de los oficios y profesiones, donde los procesos, resultados y relaciones se presentan y analizan sobre representaciones gráficas que pueden facilitar el trabajo matemático y favorecer el aprendizaje de conceptos muy diferentes.

Por ejemplo, los patrones numéricos pueden adoptar formatos geométricos, la noción de equivalencia de superficies puede ejemplificarse mediante formas distintas de áreas constantes realizadas en papel cuadriculado, las formas geométricas son posibles de representar mediante dibujos en diferentes sistemas, etcétera.

Crear diferentes imágenes o representaciones, físicas o mentales, que den significado a los conceptos matemáticos, es un paso imprescindible para la construcción de los mismos.

El estudiante debe distinguir la función de sus representaciones, y en este sentido, dicha diferenciación se favorece con actividades de articulación entre registros (verbal - algebraico; gráfico - algebraico; tabla - algebraico; gráfico - dibujo; gráfico - verbal), intentando combinar los mismos, ya que no es igual el grado de dificultad observada en el pasaje de unos a otros.

Aun cuando las calculadoras graficadoras y computadoras están simplificando el problema de graficar, se sugiere que los estudiantes desarrollen una apreciación global e intuitiva del comportamiento de las funciones y sus propiedades, ya sea a partir de la lectura como de la confección de sus gráficos y de sus expresiones analíticas. En base a los datos, con la información que extraigan, podrán anticipar en cada caso las características, tanto del gráfico como de su ecuación.

Dado que los modelos matemáticos (gráficos o algebraicos) no suelen describir con total exactitud los fenómenos del mundo real, es necesario discutir los errores de observación, las fórmulas incorrectas, las influencias incontrolables, los rangos de aplicación inapropiados, como motivos posibles de modelos incorrectos, hasta arribar al hecho evidente de que el mundo no actúa tan simplemente como lo admite la Matemática.

Los conceptos de límite, continuidad y derivada, trabajados sobre ejemplos de funciones elementales, proveerán un enfoque analítico que complementará el estudio de los gráficos.

El estudio del límite de una función es importante para el desarrollo del cálculo y necesario para la construcción de conceptos como continuidad, derivada o cálculo integral. Su enseñanza supone un gran desafío por las dificultades que trae aparejadas, ya que en él se encuentran implicados procesos, tales como la abstracción, el análisis y la demostración.

Existe una tendencia a la enseñanza del cálculo a través de un abordaje algorítmico y algebraico, realizando una presentación mecánica del concepto de límite, sin tener en cuenta

un acercamiento intuitivo o geométrico. A su vez, se utilizan las representaciones gráficas pero de manera limitada, y sin considerarlas un apoyo para los procesos algebraicos.

En contraposición, para lograr la comprensión de un concepto como éste, se deberá apelar a la interpretación, el planteo y la resolución de problemas específicos, utilizando distintos medios de representación como gráficas, dibujos, tablas, fórmulas, lenguaje coloquial, entre otros; y haciendo articulaciones entre esos registros.

La resolución de situaciones donde se integren distintas representaciones generará en los estudiantes conflictos cognitivos y desequilibrios, en pos de superar los obstáculos que se presentan en la enseñanza del límite.

Debido a la distancia entre una concepción intuitiva de los límites como la que se está proponiendo, y su definición formal, se piensa que esta última no es adecuada en esta etapa de la escolaridad. Por lo tanto, se reitera que es primordial la presentación intuitiva, ilustrada con ejemplos, acompañada de representaciones gráficas y utilizadas como herramienta para la resolución de problemas.

La derivada es uno de los conceptos más importantes del cálculo diferencial, ya que a través de ella se interpreta la forma y rapidez con que se producen los cambios, y tiene distintas aplicaciones que incluyen el trazado de curvas y la optimización de funciones.

Precisamente, el estudio de la variación lleva a construir el concepto de derivada. Su desarrollo como tasa de variación o razón de cambio tiene numerosas aplicaciones, siendo la más trabajada y simple la velocidad, razón de cambio del desplazamiento con respecto al tiempo. A su vez, hay otros ejemplos en diversas ramas del conocimiento (Ciencias Naturales, Ingeniería, Ciencias Sociales, entre otras) y resulta importante poder describir y medir estos cambios a través de modelos matemáticos. Por ejemplo:

- el crecimiento de las plantas en función del tiempo (puede permanecer estacionario y luego volver a crecer);
- la población de un país varía con el correr del tiempo;
- la concentración de un reactivo con respecto al tiempo (velocidad de reacción);
- la población de una colonia de bacterias con respecto al tiempo;
- el consumo de energía eléctrica en una ciudad en función del tiempo (aumentos o disminuciones repentinas).

Los mismos muestran que existen variaciones de las cantidades que se relacionan y es valioso medirlas y expresarlas a través de números, pues son los que permiten extraer conclusiones. Todas estas razones de cambio se pueden interpretar como pendientes de rectas tangentes, dando así un significado adicional a la solución del problema, ya que de esta manera se están resolviendo implícitamente una gran variedad de problemas en la ciencia y en la ingeniería.

Estos cambios que ocurren en la naturaleza o en la sociedad, tienen distintos comportamientos (algunos ocurren uniformemente y otros cambian a cada instante). En otros fenómenos, los cambios son complejos, como el del movimiento de los electrones o de las moléculas. Justamente, una de las funciones del cálculo consiste en encontrar las leyes que describen esos cambios para poder así medirlos y predecirlos.

En la gran mayoría de los fenómenos físicos, por ejemplo, los cambios son continuos, no suceden a "saltos", y si la velocidad de los cambios o razón de cambio media es constante, calcularla para cualquier intervalo permite saber lo que sucede en un instante cualquiera. Pero

si el fenómeno no ocurre de la manera descrita, no alcanzará con calcular la razón de cambio promedio, sino que será necesario introducir el concepto de razón de cambio instantánea, avanzando de esta manera hacia el concepto de derivada, con la adquisición por parte de los estudiantes de un significado previo y concreto.

Lo expuesto conduce a la idea de que debería interpretarse el concepto de derivada en diferentes ámbitos, como la geometría y la física, y utilizar la información que ésta provee sobre la función en la resolución de problemas que involucren, por ejemplo, el cálculo de la pendiente de rectas tangentes y normales a una curva en un punto, la velocidad de un móvil, las tasas de cambio relativas e instantáneas; advirtiendo también el poder de esta herramienta para el análisis del comportamiento de las variables involucradas y, por lo tanto, el potencial descriptivo de la misma en problemas concretos.

La aplicación de métodos, definiciones y reglas en forma rutinaria, sin la comprensión de lo que se hace y reproduciendo pasos de memoria más que de manera significativa, obviamente no ayuda a la comprensión de este concepto.

De allí que se propone la introducción intuitiva de la derivada, haciendo referencia a sus aplicaciones y donde el rigor matemático no sea el centro de la propuesta de enseñanza. El propósito es, en definitiva, la comprensión de los estudiantes de la relación que existe entre la función y su derivada, y la toma de decisiones a partir de la interpretación de ambas.

Al carácter instrumental de estos conceptos se suma el carácter formativo de los métodos de análisis, y la presentación del desarrollo histórico de dichos conceptos, que puede brindar un marco adecuado para avanzar en la comprensión de los mismos.

En el Ciclo Básico, se ha introducido el cálculo literal, a través de la manipulación de expresiones algebraicas generales de distinto grado y el pasaje de un lenguaje a otro, según las reglas de dicho cálculo. Se han resuelto ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones y de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas y ecuaciones de segundo grado con una incógnita. Se han tratado expresiones de uso frecuente y algunas factorizaciones. Las ecuaciones se han formulado, o bien directamente en el marco algebraico o como resultado de traducir en ecuaciones, sencillos problemas de geometría, de medición, de la vida cotidiana u otros.

En esta nueva etapa, el estudio versa en el marco algebraico, sobre la factorización y el desarrollo de funciones polinómicas (potenciales del tipo $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$, $h(x) = x^4$, $j(x) = x^5$ y aquellas con coeficiente -1) y racionales (en particular la función de proporcionalidad inversa $f(x) = k/x$, $k \in \mathbb{R}$ constante y $k \neq 0$). Se estudian las relaciones entre las formas de escritura y las situaciones que se manipulan, como la búsqueda de valores de anulación de un polinomio (raíces) o la resolución de ecuaciones. En el marco gráfico, el estudio aborda la representación de las funciones polinómicas y racionales usando algunas de sus propiedades.

Se procurará elaborar situaciones cuya resolución implique, en principio, coordinar temas que se enseñaban tradicionalmente en forma separada pero que, desde el punto de vista matemático, sostienen relaciones de significado.

Aquí la escritura factorizada y la escritura desarrollada facilitan el acceso a las diferentes propiedades de los polinomios. En los problemas intervienen los objetos de estudio como herramientas adaptadas para resolverlos, lo que conduce a una ampliación del campo matemático. Se hace particularmente importante interactuar y no yuxtaponer los estudios realizados en los marcos algebraico y gráfico.

Se concibe el aprendizaje del cálculo algebraico como el equilibrio entre la construcción del significado y el manejo técnico de los algoritmos.

Asimismo, las interconexiones entre diferentes marcos (algebraico, geométrico, aritmético, etc.) o los cambios de punto de vista o de registro⁹⁹ al interior de un marco, realizados para avanzar en un problema, son medios a través de los cuales se manifiesta el pensamiento. Ellos ofrecen la oportunidad de controlar ideas, de indagar las coherencias y controlar los resultados. Sin embargo, poner en práctica estos procedimientos no se logra espontáneamente, sino que se necesita una genuina intención de promoverlos.

Las desigualdades desempeñan un importante papel en diversos problemas de Matemática, entre ellos, la búsqueda de máximos y mínimos (problemas de optimización). Por otra parte, las inecuaciones son el fundamento de un aspecto de la Matemática denominado programación lineal; el cual forma parte de un conjunto de técnicas que intentan obtener el mayor beneficio posible en sistemas económicos, sociales y tecnológicos, optimizando, es decir, minimizando los costos o maximizando los beneficios; y cuyo funcionamiento se puede describir matemáticamente de modo adecuado.

Álgebra y Geometría

La enseñanza de la geometría debe atender a la sistematización de la representación espacial en coordenadas, a profundizar las relaciones entre clases de figuras y de cuerpos, a mejorar la visualización (incluyendo tanto la formación y el trabajo con imágenes mentales como las distintas maneras de representarlas), y a aplicar ideas geométricas para describir fenómenos naturales, físicos y sociales.

Una buena enseñanza de la geometría es la que brinda la oportunidad al estudiante de trabajar perceptual y lógicamente, haciéndolo evolucionar desde un nivel globalizador e intuitivo, en el que ve los objetos como totalidades, a un nivel de análisis de sus propiedades y relaciones, estimulándolo a rigorizar sus representaciones, su lenguaje, sus inferencias y sus deducciones. Es importante discutir en clase el rol de los ejemplos, los contraejemplos, las definiciones, la inducción, la prueba visual, y promover el uso de la deducción en cadenas lógicas sencillas, planteando su valor y diferenciando los elementos (axiomas, definiciones y teoremas) que constituyen las teorías matemáticas.

La comprensión correcta de las nociones espaciales y geométricas posibilitará que el estudiante use modelos geométricos que le permitan resolver problemas provenientes de la vida cotidiana, de otras ramas de la Matemática o de otros contextos disciplinares. Por ejemplo: la representación de fuerzas mediante vectores, la estructura de compuestos químicos mediante poliedros, la trayectoria de partículas mediante curvas, los datos estadísticos mediante gráficos con formas geométricas o en coordenadas, etcétera.

En un aprendizaje dinámico de la Geometría, a través de sus relaciones con los otros espacios curriculares y con las propias ramas de la Matemática, los conceptos deben aparecer y reaparecer, traducirse en diversos lenguajes y tener representaciones plurales, ya que sólo por esta vía cabe esperar una consolidación conceptual.

La trigonometría se presentará como una herramienta útil para resolver problemas del mundo real que impliquen el cálculo de distancias y ángulos (inclinaciones, alturas inaccesibles, etc.), la resolución de triángulos, el cálculo de alturas de un triángulo, áreas, etc., mostrando la conexión entre la geometría y el álgebra.

⁹⁹ El registro es un medio de expresión o de representación, y se caracteriza por su sistema semiótico, es decir, por sus signos propios y la manera en que estos se organizan.

Asimismo se ampliará esta conexión al resolver problemas que involucren las coordenadas de puntos y de vectores en un sistema de referencia; utilizándolos para caracterizar rectas y definiendo las curvas del plano, como conjuntos de puntos que cumplen cierta propiedad o como cortes de una superficie cónica con planos de distinta inclinación.

En la actualidad, el estudio de los vectores ayuda a representar y comprender numerosos fenómenos del mundo físico, por ejemplo, desplazamientos, velocidades, fuerzas, etc. A partir de allí se podrá investigar la suma de vectores y multiplicación por un escalar, desde el punto de vista geométrico y algebraico, y comprobar sus aplicaciones en la resolución de problemas variados, como por ejemplo, cuantificar los efectos del viento en la ruta de un avión o de un barco, en planificaciones económicas, en la teoría en la que se basa un electrocardiograma, etcétera.

En otras palabras, los vectores son un modelo matemático adecuado para representar fenómenos diversos. La posibilidad de representarlos en un sistema de coordenadas cartesianas, permite resolver variados problemas geométricos y físicos desde un nuevo punto de vista.

Las operaciones entre magnitudes vectoriales (el cálculo de velocidades y las fuerzas resultantes, la búsqueda del estado de equilibrio, el cálculo del trabajo realizado al mover un cuerpo), pueden interpretarse matemáticamente a partir de las operaciones entre los vectores que las representan. Asimismo, el producto de un vector por un número permitirá describir situaciones relacionadas, por ejemplo, con las traslaciones de vectores en una misma dirección o con la determinación de fuerzas con la misma recta de aplicación.

Se propone retomar de años anteriores el estudio de la circunferencia y de la parábola, dado que las distintas miradas y representaciones ayudarán a la formación del concepto, con el propósito de que los estudiantes puedan trabajar indistintamente con diferentes representaciones de un mismo objeto, según las necesidades.

Es importante tener en cuenta que el tratamiento de estos temas, sobre todo de aquéllos que se desarrollen en el espacio (rectas, planos, vectores, cónicas), no necesariamente debe tener un inicio algebraico (mediante las ecuaciones), sino involucrar un trabajo experimental con variados recursos o elementos concretos (lápices, cajas, papeles, alambres, instrumentos geométricos, etc.) que permitan la materialización de diversas situaciones y mejoren el análisis de su comportamiento.

La computadora, haciendo uso de los software educativos, la fotografía, el retroproyector y las fotocopiadoras pueden brindar al estudiante ricas experiencias para el desarrollo de la visualización y la exploración de conceptos geométricos (perspectiva, proyecciones, transformaciones del plano y del espacio, etc.), sin sustituir completamente, como ya se anticipara, su experiencia directa con objetos materiales, el dibujo, las construcciones y el uso de los instrumentos de geometría.

Estadística y Probabilidad

Retomando la enseñanza del eje en este ciclo, el propósito fundamental es profundizar, ampliar y sistematizar los saberes que ya han sido trabajados en cursos anteriores. Como afirman Steimbring y von Harten (1982), citado por Díaz Godino¹⁰⁰ *“la formación estocástica (síntesis de la probabilidad y la estadística), en la escuela, debe vincular: lo estocástico*

¹⁰⁰ Díaz Godino, J. y otros. 1996. Azar y Probabilidad. Nº 27. España. Ed. Síntesis. p. 29.

como la lógica de la incertidumbre, la matemática de los fenómenos de masas, la teoría de la decisión y la estadística como tecnología de la transformación de los datos en información significativa.”

Dado el carácter determinista de la enseñanza de la Matemática y frente a la necesidad de mostrar al estudiante una imagen más equilibrada de la realidad, en la que muchos problemas son inciertos y poco definidos, una mención especial merece la formación del pensamiento estadístico y probabilístico. Es importante que en los años de escolaridad se enseñe a los estudiantes a distinguir grados de incertidumbre y a comparar sus predicciones con lo que realmente sucede; dado que, si bien las leyes del azar son aproximadas, es posible hacer predicciones frente a fenómenos que no pueden medirse con una precisión absoluta. Por eso, en este eje se debe incluir el estudio matemático de los fenómenos aleatorios porque el azar está presente en nuestro entorno y los estudiantes deben aprender a manejarse con él, lo que implica una manera diferente de pensar y encarar las situaciones que se le presentan.

El estudiante, ante un conjunto de datos, deberá organizarlos, reconocer los distintos tipos de variables que intervienen, realizar el análisis de los mismos a partir de los gráficos y de los parámetros de posición y dispersión, obtener conclusiones y formular hipótesis que luego podrán ser corroboradas o rechazadas.

Las representaciones gráficas (en especial los histogramas) y el análisis de los parámetros estadísticos ya citados, le permitirán apreciar globalmente el comportamiento del conjunto de datos, interpolar y extrapolar, cuidando que se mantengan las condiciones del problema, y así poder deducir consecuencias. A causa de que la distribución de datos a partir de fenómenos del mundo real puede aproximarse a una curva normal, se debería procurar que los estudiantes se familiarizaran con alguna de las propiedades y usos de esta gráfica.

La distribución normal describe los fenómenos que, aun teniendo rasgos propios, presentan una esencia común, resultado de la acción de muchos factores y variables independientes, cuyo mutuo trabajo corrige y anula los resultados extremos preponderando los términos medios, es decir, los individuos sin caracteres sobresalientes. Entre las muchas variables que se distribuyen normalmente se pueden citar: caracteres morfológicos de individuos (personas, animales y plantas) de una misma raza; caracteres fisiológicos (por ejemplo, el efecto de una misma dosis de remedio o de una misma cantidad de abono); caracteres sociológicos (el consumo de ciertos tipos de productos por individuos de un mismo grupo humano); caracteres psicológicos (grado de adaptación a un medio); caracteres físicos (resistencia a la rotura de piezas), etcétera.

Asimismo, se ha de dedicar un tiempo especial al análisis de la información estadística que brindan, por ejemplo, los medios de comunicación, con el fin de aprender a discriminar los usos correctos e incorrectos de la misma (promedio, representatividad de la muestra, extrapolaciones incorrectas, percepciones influidas por la selección de escalas de medición en las representaciones), lo apropiado o no de ciertas medidas para la interpretación del problema dado, y la representatividad de las muestras (en ejemplos concretos).

La utilización de los recursos informáticos será de gran ayuda en el tratamiento de este eje priorizando el análisis sobre los cálculos estadísticos, y agilizando, además, la realización de las representaciones gráficas.

En estos años de la escolaridad es importante que los estudiantes puedan ligar su quehacer estadístico, no sólo a situaciones de la vida cotidiana, sino también a problemas específicos de otras áreas de conocimiento, como Sociales, Naturales, Economía, etc.; y que seguramente, estarán formando parte de los espacios curriculares específicos de cada Orientación. De tal

forma, se propicia la articulación entre este espacio común de la formación con la Orientación, abordando aquellos problemas que requieran un tratamiento estadístico.

Los propósitos de cada una de las Orientaciones del Ciclo Orientado pueden ser un referente válido a la hora de decidir, no solamente los saberes a desarrollar y los procedimientos cognitivos que se ponen en juego, sino también la selección de las estrategias de enseñanza que comprometan a los estudiantes y den lugar a aprendizajes basados en la transferencia de saberes a situaciones problemáticas efectivas. Es así como, por ejemplo, los proyectos de trabajo suelen ser una alternativa que viabiliza la integración que se propicia, y en los que se aúnan esfuerzos de los diferentes espacios curriculares para abordar conjuntamente un tema.

Se agregarán otras reflexiones relacionadas con la Estadística, en las Consideraciones de la Matemática en las distintas Orientaciones.

La enseñanza de la Probabilidad tiene como propósito trabajar con los estudiantes los conceptos de azar, posibilidad, grados de probabilidad e imparcialidad. Mediante situaciones de juego, experimentales o usando modelos de simulación, el estudiante podrá explorar las relaciones entre la probabilidad empírica o estadística y la teórica, y aprender a valorarla para la toma de decisiones. También, mediante problemas, captará la idea de eventos independientes y dependientes y sus relaciones con eventos compuestos y de probabilidad condicionada.

La finalidad es que adviertan que los fenómenos aleatorios están regidos por leyes bien precisas y no son, después de todo, tan caprichosos como parecen a primera vista. Los problemas de Probabilidad en el esquema clásico muestran además, la conveniencia de disponer de métodos de conteo más potentes. Los procedimientos que colaboran al recuento de objetos (diagrama de árbol, tablas de frecuencias o de contingencias) y las maneras de combinarlos y agruparlos (permutaciones, variaciones y combinaciones) pueden ser trabajados sin entrar en definiciones formales, sino a partir de ejemplos que les permitan hallar regularidades y elaborar fórmulas.

3.1. Consideraciones de la Matemática en las distintas Orientaciones

Se espera que, al planificar el espacio curricular de Matemática, se tenga en cuenta la Orientación, ya que en esta instancia se toman decisiones en cuanto a la selección de contenidos y la organización de los mismos; y se diseñan secuencias didácticas escogiendo problemas, actividades, ejemplos y materiales.

Ciencias Naturales

El espacio disciplinar de Matemática incluye el tratamiento de contenidos referidos a aspectos analíticos, algebraicos, geométricos, estadísticos, para la modelización de situaciones del mundo real y el tratamiento de la información. Se espera que de esta manera se fortalezcan procedimientos, tales como la resolución de problemas, el desarrollo del razonamiento y la elaboración de preguntas, entre otros; que posibilitarán que el estudiante entre en contacto con aspectos importantes del trabajo científico.

Estos contenidos matemáticos incorporados en la enseñanza, constituyen herramientas fundamentales para el tratamiento de los datos experimentales y la utilización de modelos formales.

La Orientación debiera aportar temas de interés para los estudiantes, con una relevancia distinta de otros posibles, desarrollando así contenidos matemáticos cargados de significado y

construidos en procesos dinámicos de aprendizaje. Resultan de gran actualidad temas particulares como el agua, el aire, la contaminación, el medio ambiente, el planeta, entre otros.

El análisis funcional gráfico cualitativo ayudará a analizar y describir fenómenos dados en forma verbal y, recíprocamente, permitirá analizar características de ciertos fenómenos a partir de las gráficas que los representan. Por ejemplo, la realización de gráficas cartesianas del volumen de un líquido, que se introduce en distintos recipientes, en función de la altura que va alcanzando el mismo a medida que se van llenando ($v = f(h)$); la realización de gráficas clínicas: evolución de la temperatura corporal de un enfermo en función del tiempo ($t = f(T)$), la cantidad de litros de sangre que bombea el corazón hacia la aorta por minuto (gasto cardíaco en función de la presión auricular); la variación de la actividad enzimática (fosforilasa y sintasa) en el hígado al suministrar glucosa en el flujo sanguíneo¹⁰¹, entre otros.

Otros aportes temáticos de la Matemática a la Orientación son:

- la función exponencial, que en la naturaleza se manifiesta en los crecimientos y los decrecimientos poblacionales (de seres humanos, de bacterias, de langostas, de tumores), durante un cierto periodo y en ciertas condiciones (donde el valor de la base es el número irracional e , base de los logaritmos naturales); también cuando se investiga la desintegración de una sustancia radioactiva o cuando se necesita establecer el interés continuo que genera un capital determinado.
- las ecuaciones exponenciales podrían surgir como necesidad para calcular el tiempo transcurrido desde que se inició un cultivo, conociendo el número inicial y final de amebas sabiendo que se duplican por bipartición cada día;
- la función logarítmica, que se aplica en la escala Richter para establecer la magnitud de un sismo, en la determinación del pH de una solución, entre otros;
- las funciones trigonométricas, muy utilizadas para analizar fenómenos periódicos, tales como: movimientos ondulatorios, corriente eléctrica alterna, cuerdas vibrantes, oscilaciones de péndulos, movimiento periódico de los planetas, ciclos biológicos, etcétera;
- las relaciones y ecuaciones trigonométricas, que conducen a desarrollar procesos más específicos de pensamiento;
- los vectores son un modelo matemático adecuado para representar fenómenos diversos. Con su representación en un sistema de coordenadas cartesianas, se resuelven variados problemas geométricos y físicos;

Las operaciones entre magnitudes vectoriales (el cálculo de velocidades y las fuerzas resultantes, la búsqueda del estado de equilibrio, el cálculo del trabajo realizado al mover un cuerpo), pueden interpretarse matemáticamente a partir de las operaciones entre los vectores que las representan. El producto de un vector por un número permitirá describir situaciones relacionadas, por ejemplo, con las traslaciones de vectores en una misma dirección o con la determinación de fuerzas con la misma recta de aplicación.

Asimismo, algunos procesos de cambio, como el crecimiento poblacional y la optimización (cálculo de máximos y mínimos) pueden relacionarse con la noción de derivada, interpretada como pendiente de la tangente a la gráfica, constituyendo otra herramienta eficaz para resolver situaciones relacionadas con la Orientación.

¹⁰¹ Los ejemplos fueron tomados del libro: Conexiones matemáticas. Ortega, T. 2005. Barcelona. Editorial GRAÓ. pp. 103 -112

Por otra parte, la Estadística y la Probabilidad aportarán herramientas para el desarrollo de proyectos propios de la Orientación o del espacio curricular de Matemática en relación con la misma.

No solamente se estudiarán fenómenos de difícil cuantificación, a través de la recolección y organización de datos, la identificación de las variables intervinientes, el análisis de las mismas a partir de los gráficos y de los parámetros de posición y dispersión, la elaboración de conclusiones y formulación de hipótesis; sino también, se ha de dedicar un tiempo especial al análisis de la información estadística obtenida de diferentes fuentes. Este análisis apuntará a discriminar los usos correctos e incorrectos de dicha información (promedio, extrapolaciones incorrectas, percepciones influidas por la selección de escalas de medición en las representaciones), lo apropiado o no de ciertas medidas para la interpretación del problema dado y la representatividad de las muestras (en ejemplos concretos).

La utilización de los recursos informáticos será de gran ayuda en el tratamiento de cada uno de los ejes. En particular, con su uso en la Estadística se priorizará el análisis sobre los cálculos estadísticos y, además, se agilizará la realización de las representaciones gráficas.

Comunicación

La Matemática ha ido ampliando y diversificando su objetivo y perspectiva en las últimas décadas. Si tradicionalmente era considerada imprescindible en las llamadas carreras científicas y técnicas, su lenguaje y su método se han revelado como sumamente eficaces en el tratamiento, explicación y comunicación de los más diversos fenómenos y aspectos de la realidad social. Por lo tanto, las razones de su enseñanza en la escuela exceden ya el objetivo de contribuir al desarrollo personal y la capacitación instrumental individual de los estudiantes. Saber pensar y comunicarse matemáticamente constituye hoy una necesidad social que debe ser atendida en la escuela, para logren su inserción real y autónoma en la sociedad en que viven.

Por lo expuesto, resulta conveniente que los estudiantes de esta Orientación adquieran un buen dominio de determinadas destrezas y expresiones matemáticas.

El espacio disciplinar de Matemática incluye el tratamiento de contenidos referidos a aspectos analíticos, algebraicos, geométricos, estadísticos, para la modelización de situaciones del mundo real y el tratamiento de la información. De esta manera se apunta a fortalecer la resolución de problemas, el desarrollo del razonamiento, la transferencia de conocimientos y la interpretación crítica de todo tipo de información que aparece en los medios de comunicación. Además, estableciendo conexiones entre las diferentes formas de representación (concretas, gráficas, simbólicas, verbales y mentales de conceptos y relaciones matemáticas), se logra coherencia y precisión en las exposiciones, ya que la comunicación de ideas contribuye a clarificar, agudizar y consolidar el razonamiento, y conlleva, la necesidad de precisar el vocabulario y compartir definiciones para evitar la ambigüedad que existe en el lenguaje común.

Estos contenidos matemáticos incorporados en la enseñanza de la Matemática, constituyen herramientas fundamentales para el tratamiento de los datos experimentales y la utilización de modelos formales.

La Orientación debiera aportar temas de interés para los estudiantes, con una relevancia distinta de otros posibles, desarrollando así contenidos matemáticos cargados de significado y construidos en procesos dinámicos de aprendizaje, como los del eje de Estadística y la Probabilidad.

Asimismo, no solamente se estudiarán fenómenos de difícil cuantificación, a través de la recolección y organización de datos, la identificación de las variables intervinientes, el análisis de las mismas a partir de los gráficos y de los parámetros de posición y dispersión, la elaboración de conclusiones y formulación de hipótesis; sino también, se ha de dedicar un tiempo especial al análisis de la información estadística obtenida de diferentes fuentes. Este análisis apuntará a discriminar los usos correctos e incorrectos de dicha información (promedio, extrapolaciones incorrectas, percepciones influidas por la selección de escalas de medición en las representaciones), lo apropiado o no de ciertas medidas para la interpretación del problema dado y la representatividad de las muestras (en ejemplos concretos).

La utilización de los recursos informáticos será de gran ayuda en el tratamiento de cada uno de los ejes. En particular, con su uso en la Estadística se priorizará el análisis sobre los cálculos estadísticos, y además, se agilizará la realización de las representaciones gráficas.

Otro recurso a tener en cuenta es el diario que, en muchas ocasiones, es una fuente inagotable de datos que permiten formular tareas para los estudiantes. Si se seleccionan textos que tengan un alto interés social y que contengan una carga de Matemática adecuada, se dotará de una significación especial a los contenidos matemáticos que se traten y, si el texto es rico en contenidos matemáticos, se pueden elaborar propuestas interesantes.

Las tablas numéricas son otro recurso que se puede localizar en un diario. Constituyen un sistema de representación que se destaca por su sencillez, su capacidad de síntesis y por el ordenamiento de los datos que contienen. Las mismas dan cuenta de situaciones de horarios, estadística, contabilidad, bases de datos, hojas de cálculo, informes, etcétera.

Economía y Administración

El espacio disciplinar de Matemática incluye el tratamiento de contenidos referidos a aspectos analíticos, algebraicos, geométricos, estadísticos, para la modelización de situaciones del mundo real y el tratamiento de la información, esperando que así se fortalezcan la resolución de problemas, el desarrollo del razonamiento, la transferencia de conocimientos y la interpretación crítica de todo tipo de información que aparece en los medios de comunicación.

Estos contenidos matemáticos incorporados en la enseñanza, constituyen herramientas fundamentales para el tratamiento de los datos experimentales y la utilización de modelos formales.

La Orientación debiera aportar temas de interés para los estudiantes, con una relevancia distinta de otros posibles, desarrollando así contenidos matemáticos cargados de significado y construidos en procesos dinámicos de aprendizaje.

Otros aportes temáticos de la Matemática a la Orientación son:

- las ecuaciones exponenciales podrían surgir como necesidad al calcular el tiempo transcurrido desde que se colocó un determinado capital a interés compuesto, conociendo el capital final.
- el tratamiento de las sucesiones utilizadas para el cálculo financiero, asociadas al límite, y los contenidos de probabilidad relacionados con ensayos repetidos.
- el concepto de derivada, fundamental a la hora de medir la rapidez de cambio de la función costo con respecto a la cantidad de artículos producidos, aplicable también en los problemas de optimización (cálculo de máximo rendimiento y mínimo costo). A su vez, los economistas estudian los ingresos, gastos y utilidades marginales, que son las derivadas de sus respectivas funciones.

La Estadística y la Probabilidad aportarán herramientas para el desarrollo de proyectos propios de la Orientación o del espacio curricular de Matemática en relación con la misma.

Asimismo, no solamente se estudiarán fenómenos de difícil cuantificación, a través de la recolección y organización de datos, la identificación de las variables intervinientes, el análisis de las mismas a partir de los gráficos y de los parámetros de posición y dispersión, la elaboración de conclusiones y formulación de hipótesis; sino también, se ha de dedicar un tiempo especial al análisis de la información estadística obtenida de diferentes fuentes. Este análisis apuntará a discriminar los usos correctos e incorrectos de dicha información (promedio, extrapolaciones incorrectas, percepciones influidas por la selección de escalas de medición en las representaciones), lo apropiado o no de ciertas medidas para la interpretación del problema dado y la representatividad de las muestras (en ejemplos concretos).

La utilización de los recursos informáticos será de gran ayuda en el tratamiento de cada uno de los ejes. En particular, con su uso en la Estadística se priorizará el análisis sobre los cálculos estadísticos y, además, se agilizará la realización de las representaciones gráficas.

Ciencias Sociales

La Matemática ha ido ampliando y diversificando su objetivo y perspectiva en las últimas décadas. Si tradicionalmente eran consideradas imprescindibles en las llamadas carreras científicas y técnicas, su lenguaje y su método se han revelado como sumamente eficaces en el tratamiento, explicación y comunicación de los más diversos fenómenos y aspectos de la realidad social. Por lo tanto, las razones de su enseñanza en la escuela exceden ya el objetivo de contribuir al desarrollo personal y la capacitación instrumental individual de los estudiantes. Saber pensar y comunicarse matemáticamente constituye hoy una necesidad social que debe ser atendida en la escuela para logren su inserción real y autónoma en la sociedad en que viven.

Por lo expuesto, resulta conveniente que los estudiantes de esta Orientación adquieran un buen dominio de determinadas destrezas y expresiones matemáticas.

La Orientación debiera aportar temas de interés para los estudiantes, con una relevancia distinta de otros posibles, desarrollando así contenidos matemáticos cargados de significado y construidos en procesos dinámicos de aprendizaje. Por ejemplo, en geometría, es posible realizar análisis de tipo cuantitativo (con el uso de coordenadas) o figurativo (con la construcción de maquetas de topografía, determinando desniveles, cortes, etc.).

El espacio disciplinar de Matemática incluye el tratamiento de contenidos referidos a aspectos analíticos, algebraicos, geométricos, estadísticos, para la modelización de situaciones del mundo real y el tratamiento de la información. De esta manera se apunta a fortalecer la resolución de problemas, el desarrollo del razonamiento, la transferencia de conocimientos y la interpretación crítica de todo tipo de información que aparece en los medios de comunicación. Además, estableciendo conexiones entre las diferentes formas de representación (concretas, gráficas, simbólicas, verbales y mentales de conceptos y relaciones matemáticas), se logra coherencia y precisión en las exposiciones, ya que la comunicación de ideas contribuye a clarificar, agudizar y consolidar el razonamiento, y conlleva, la necesidad de precisar el vocabulario y compartir definiciones para evitar la ambigüedad que existe en el lenguaje común.

Estos contenidos matemáticos incorporados en la enseñanza, constituyen herramientas fundamentales para el tratamiento de los datos experimentales y la utilización de modelos formales.

Algunos aportes temáticos de la Matemática a la Orientación son:

- la función exponencial, que se manifiesta cuando se quiere datar una lengua cuya historia no está documentada, como ocurre con la mayoría de las lenguas que hablan los indígenas, o bien, asociada a situaciones específicas de demografía y población.
- las funciones trigonométricas, utilizadas actualmente para realizar modelos de fenómenos que son periódicos, al menos en forma aproximada. Por ejemplo, el día y la noche, las mareas, las fases de la luna, los latidos del corazón, el movimiento de las cuerdas de un instrumento, la luz, entre otros; resultando evidente que, para cada fenómeno, el conocimiento de la duración de un ciclo es decisivo para hacer predicciones, aun si son cambiantes. Algunas veces, esto podrá hacerse con precisión pero, en general, sólo se determinará de un modo aproximado, sobre todo en fenómenos relacionados con lo social.
- algunos procesos de cambio, como el crecimiento poblacional y la optimización (cálculo de máximos y mínimos) pueden relacionarse con la noción de derivada, interpretada como pendiente de la tangente a la gráfica, constituyendo otra herramienta eficaz para resolver situaciones relacionadas con la Orientación.
- la noción de límite, aporta la idea de que el comportamiento en un punto debe ser similar a lo que ocurre en los puntos cercanos a él, a diferencia de lo que sucede en otros contextos (por ejemplo "límite de velocidad" vehicular permitido, "límite de tolerancia" acústica y sus implicancias sociales), en los cuales se entiende como un tope a partir del cual ocurre algo diferente.

La Estadística y la Probabilidad aportarán herramientas para el desarrollo de proyectos propios de la Orientación o del espacio curricular de Matemática en relación con la misma.

Asimismo, no solamente se estudiarán fenómenos de difícil cuantificación, a través de la recolección y organización de datos, la identificación de las variables intervinientes, el análisis de las mismas a partir de los gráficos y de los parámetros de posición y dispersión, la elaboración de conclusiones y formulación de hipótesis; sino también, se ha de dedicar un tiempo especial al análisis de la información estadística obtenida de diferentes fuentes. Este análisis apuntará a discriminar los usos correctos e incorrectos de dicha información (promedio, extrapolaciones incorrectas, percepciones influidas por la selección de escalas de medición en las representaciones), lo apropiado o no de ciertas medidas para la interpretación del problema dado y la representatividad de las muestras (en ejemplos concretos).

La utilización de los recursos informáticos será de gran ayuda en el tratamiento de cada uno de los ejes. En particular, con su uso en la Estadística se priorizará el análisis sobre los cálculos estadísticos, y además, se agilizará la realización de las representaciones gráficas.

Otro recurso a tener en cuenta es el diario que, en muchas ocasiones, es una fuente inagotable de datos que permiten formular tareas para los estudiantes. Si se seleccionan textos que tengan un alto interés social y que contengan una carga de Matemática adecuada, se dotará de una significación especial a los contenidos matemáticos que se traten y, si el texto es rico en contenidos matemáticos, se pueden elaborar propuestas interesantes.

Las tablas numéricas que se pueden localizar en un diario, constituyen un sistema de representación que se destaca por su sencillez, su capacidad de síntesis y por el ordenamiento de los datos que contienen. Las mismas dan cuenta de situaciones de horarios, estadística, contabilidad, bases de datos, hojas de cálculo, informes, etcétera.

3.2. CUADROS de Contenidos y Recomendaciones para la enseñanza

Eje: ACTITUDES EN LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA	
En relación con la propia persona	<ul style="list-style-type: none"> - Autonomía en su desempeño integral. - Confianza en su posibilidad de plantear y resolver problemas. - Seguridad en la defensa de argumentos y flexibilidad para modificarlos. - Sentido crítico sobre las estrategias usadas y los resultados obtenidos. - Disciplina, esfuerzo y perseverancia en la búsqueda de soluciones a los problemas. - Tolerancia frente a los errores y logros en la resolución de problemas.
En relación con el conocimiento, su forma de producción y de comunicación	<ul style="list-style-type: none"> - Valoración de la Matemática desde su aspecto lógico, instrumental y social. - Curiosidad, honestidad, apertura y escepticismo como bases del conocimiento científico. - Valoración del lenguaje claro y preciso como expresión y organización del pensamiento. - Sensibilidad ante las propiedades matemáticas de las manifestaciones de la naturaleza, las artes y la tecnología. - Curiosidad por manejar instrumentos y conocer sus características y uso adecuado, reconociendo el valor de las nuevas herramientas tecnológicas para el aprendizaje de la Matemática.
En relación con la sociedad	<ul style="list-style-type: none"> - Valoración del intercambio de ideas como fuente de aprendizajes, respetando el pensamiento ajeno. - Aprecio y respeto por las convenciones que permiten una comunicación universalmente aceptada. - Valoración del trabajo cooperativo y la toma de responsabilidades a efectos de lograr un objetivo común.

	<ul style="list-style-type: none"> - Honestidad en la presentación de resultados. - Superación de estereotipos discriminatorios por motivos de género, sociales, étnicos u otros, acerca del rendimiento en el aprendizaje de la Matemática.
--	--



En los Ejes Temáticos, los saberes / contenidos están escritos en letra normal y, en cursiva, las recomendaciones para la enseñanza de algunos de ellos.

Eje	Cuarto año	Quinto año
Número y Operaciones	<p>Números irracionales. Radicales. Representación gráfica. Orden. Aproximación.</p> <p>Intervalos en la recta real. Módulo de un número real. Distancia entre dos números.</p> <p><i>Representación y comparación de los números irracionales en situaciones matemáticas y de la vida real.</i></p> <p><i>Usos de los números irracionales en operaciones para resolver problemas aritméticos y geométricos.</i></p> <p><i>Resolución de situaciones problemáticas que conlleven la utilización de radicales.</i></p>	<p>Logaritmo de un número. Propiedades de los logaritmos. Logaritmos naturales y decimales. El número e. Cambio de base.</p> <p><i>Resolución de situaciones que impliquen el cálculo fluido con logaritmos, usando variadas estrategias.</i></p>

	<p>Origen de los números complejos. Partes de un número complejo. Representación gráfica.</p> <p><i>Reconocimiento de los números complejos como solución de las ecuaciones de la forma $x^2 + 1 = 0$.</i></p>	
<p>Funciones y Álgebra</p>	<p>Sucesiones. Fórmula del enésimo término. Recurrencia. Sucesiones monótonas (crecientes y decrecientes). Sucesiones alternadas.</p> <p><i>Resolución de problemas creando secuencias de números, determinando la ley de formación o algún término en particular.</i></p> <p>Polinomios en una indeterminada. Coeficientes y grado. Polinomios completos e incompletos. Valor numérico de un polinomio.</p> <p>Suma, resta, multiplicación. Cuadrado y cubo de un binomio. División. Regla de Ruffini. Teorema el resto.</p> <p><i>Resolución de operaciones con polinomios aplicando las propiedades correspondientes, y generalizando soluciones o resultados.</i></p> <p>Divisibilidad y Factorización de polinomios. Raíces de los polinomios. Teorema Fundamental del álgebra.</p> <p>Polinomios expresados como productos: factor común, diferencia de cuadrados, factor común por grupos, trinomio cuadrado perfecto. Uso de la Regla de Ruffini.</p> <p>Polinomios primos y factorización. Raíces múltiples.</p> <p><i>Factorización de expresiones polinómicas con diversas estrategias.</i></p>	<p>Sucesiones aritméticas y geométricas. Límite de una sucesión.</p> <p><i>Resolución de situaciones problemáticas que conlleven el cálculo de términos y razones de sucesiones.</i></p> <p><i>Determinación del límite de sucesiones en la resolución de problemas.</i></p> <p>La función exponencial. Formas: $y = a^x$ $y = k \cdot a^x$</p> <p>La función logarítmica. Funciones logarítmicas de distinta base. Desplazamientos.</p> <p><i>Análisis de las características de las funciones estudiadas: dominio, imagen, crecimiento y decrecimiento, asíntotas, intersección con los ejes.</i></p> <p><i>Aplicaciones de las funciones exponenciales y logarítmicas a otras ciencias y a situaciones de la vida cotidiana.</i></p> <p>Ecuaciones exponenciales y logarítmicas. Sustitución de variables.</p> <p>Sistemas de ecuaciones exponenciales y logarítmicas.</p> <p>Funciones trigonométricas. Ángulos orientados en un sistema cartesiano. Medición de ángulos. Radianes.</p> <p>Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera.</p>

<p><i>Aplicación de conceptos de divisibilidad de polinomios a diferentes situaciones.</i></p> <p><i>Resolución de problemas usando la factorización de polinomios y las propiedades involucradas.</i></p> <p>Funciones potenciales. Gráficos. Conjuntos de positividad, negatividad y de ceros. Intersecciones con los ejes. Paridad.</p> <p><i>Uso de las funciones potenciales para representar y describir situaciones de la vida real.</i></p> <p><i>Análisis de las características de las funciones potenciales.</i></p> <p>Expresiones racionales. Simplificación de expresiones racionales.</p> <p>Función racional. Gráficos. Intersecciones con los ejes. Ceros. Asíntotas verticales y horizontales.</p> <p><i>Resolución de problemas usando expresiones racionales.</i></p> <p><i>Representación gráfica de funciones racionales asociándolas a situaciones numéricas y experimentales reconociendo que la misma función puede servir para modelizar una variedad de problemas.</i></p> <p><i>Descripción de funciones racionales sencillas en base a sus características (dominio, imagen, crecimiento, continuidad, asíntotas, ceros).</i></p>	<p>La circunferencia trigonométrica.</p> <p>Razones trigonométricas de:</p> <ul style="list-style-type: none"> - ángulos especiales. - un ángulo. - ángulos simétricos. <p>Las funciones trigonométricas. Variaciones. Inversas de las funciones trigonométricas.</p> <p><i>Análisis de los efectos de cada parámetro y estudio de cada una de las funciones trigonométricas.</i></p> <p><i>Uso de la identidad pitagórica y la relación entre sen, cos, tg.</i></p> <p><i>Análisis de las relaciones en cualquier cuadrante.</i></p> <p><i>Cálculo de valores exactos de algunos ángulos conociendo los elementales.</i></p> <p><i>Calcular las razones trigonométricas de cualquier ángulo estableciendo las relaciones conocidas.</i></p> <p>Identidades y Ecuaciones trigonométricas.</p> <p><i>Resolución de identidades, transformándolas en expresiones equivalentes.</i></p> <p><i>Planteo y resolución de ecuaciones.</i></p> <p>Noción del límite de una función en un punto. Existencia. Límites laterales.</p>
--	---

		<p>Límites de algunas de las funciones estudiadas. La indeterminación.</p> <p>Límites de funciones compuestas.</p> <p>Límite en el infinito. Asíntota horizontal.</p> <p>Límite infinito en un punto. Asíntota vertical.</p> <p>Límite infinito en el infinito.</p> <p><i>Análisis de tablas y gráficos para abordar la noción intuitiva del límite.</i></p> <p><i>Determinación de la existencia o no del límite de una función en un punto a partir de su gráfico, a través de los límites laterales.</i></p> <p><i>Estimación de límites a partir de gráficos de funciones (constante, identidad, raíz cuadrada, seno, coseno, exponencial, logarítmica, etc.).</i></p> <p><i>Cálculo de límites de funciones compuestas.</i></p> <p><i>Determinación de las asíntotas horizontales y verticales de funciones a partir de sus límites.</i></p> <p><i>Análisis de funciones estudiadas con límite infinito en el infinito (funciones potenciales pares e impares; funciones exponenciales y logarítmicas, entre otras).</i></p> <p><i>Análisis de funciones en los que se dan algunas indeterminaciones.</i></p> <p>Continuidad. Funciones continuas. Propiedades de las funciones continuas. Teorema del valor intermedio. Búsqueda de raíces de una ecuación.</p>
--	--	---

		<p>Valores extremos de una función.</p> <p><i>Descripción de los gráficos de cualquier función, analizando: dominio, imagen, intervalos de crecimiento, puntos críticos, asíntotas, intersección con los ejes y tendencia.</i></p> <p><i>Representación gráfica de funciones a partir de sus expresiones algebraicas.</i></p> <p>Noción de derivada. Tasa de variación media. Velocidad media. Derivada de una función en un punto. Derivada y razón de cambio. Derivada y recta tangente. La función derivada.</p> <p>Derivadas de funciones elementales.</p> <p><i>Resolución de problemas que impliquen la noción de derivada como tasa de variación o razón de cambio.</i></p> <p><i>Utilización de la noción de derivada para resolver problemas y para graficar funciones.</i></p>
Geometría y Álgebra	<p>Vectores en el plano. Elementos. Vectores referidos al origen de coordenadas.</p> <p>Suma, resta de vectores y producto de un escalar por un vector. Módulo de un vector.</p> <p>Producto escalar de vectores. Propiedades.</p> <p>Los vectores y la ecuación de la recta: ecuación vectorial de la recta. Relaciones entre las distintas ecuaciones de una recta.</p> <p>Distancia entre puntos del plano cartesiano.</p>	<p>Vectores y trigonometría: Teorema del seno y del coseno (posible demostración aplicando vectores).</p> <p>Resolución de triángulos oblicuángulos.</p> <p>Vectores en componentes. Operaciones.</p> <p><i>Modelización de problemas geométricos o físicos usando vectores.</i></p> <p><i>Resolución de situaciones problemáticas que impliquen distinguir los casos en los que se puede resolver un triángulo utilizando el teorema de Pitágoras, las razones trigonométricas o el teorema del seno y del coseno.</i></p> <p>Geometría en coordenadas. Rectas en el espacio. Relaciones entre</p>

	<p><i>Resolución de problemas que impliquen operar con vectores en otros campos del conocimiento (por ejemplo, Física (fuerzas, velocidades, etc.) u otros relacionados con ella, como la meteorología.</i></p> <p><i>Resolución de problemas usando distintas ecuaciones de una recta, estableciendo relaciones entre ellas.</i></p> <p>Algunas secciones cónicas (circunferencia, hipérbola y parábola) como lugares geométricos y/o como cortes de una superficie cónica con planos de distinta inclinación. Características geométricas (elementos, propiedades y forma de las cónicas). Construcciones de las secciones cónicas.</p> <p><i>Modelización de diversas situaciones problemáticas de la realidad con estas curvas (trayectorias de móviles, diseño de reflectores parabólicos, estructuras arquitectónicas, plantas, etc.).</i></p>	<p>las distintas ecuaciones de una recta (caso particular de la recta en el plano). Rectas paralelas y ortogonales.</p> <p>Ecuación del plano. Relaciones entre las distintas ecuaciones del plano.</p> <p>Posiciones relativas de dos planos (paralelos y secantes (perpendiculares)).</p> <p><i>Representación de rectas y planos en el contexto de las figuras y los cuerpos.</i></p> <p><i>Utilización de softwares educativos para el análisis e interpretación de rectas y planos en el espacio y sus intersecciones.</i></p>
<p>Estadística y Probabilidad</p>	<p>Estadística. Población. Muestras: su representatividad. Técnicas simples de muestreo (aleatorio, estratificado).</p> <p>Escalas de medición. Tablas de frecuencias (absoluta, relativa, porcentual y acumulada). Gráficos estadísticos.</p> <p><i>Resolución de problemas * que impliquen:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - <i>recolección, organización y descripción de datos sistemáticamente;</i> - <i>lectura, interpretación y construcción de tablas, cuadros y gráficos estadísticos;</i> - <i>elección de la escala de medición adecuada al fenómeno considerado.</i> 	<p>* Aplicaciones, a partir de proyectos vinculados con la Orientación correspondiente. Uso de la computadora como herramienta en la estadística.</p>

	<p>Parámetros estadísticos. Parámetros centrales y de dispersión más comunes. Uso de la calculadora. Distribución normal.</p> <p><i>Cálculo de valores estadísticos representativos (media aritmética, mediana, moda, dispersión) usando la calculadora o la computadora.</i></p> <p><i>Interpretación en gráficos de los parámetros estadísticos. Elaboración de inferencias y argumentos convincentes a partir del análisis de datos numéricos y toma de decisiones.</i></p> <p>Los abusos en el uso de la estadística. Proyección de los resultados de una muestra.</p> <p><i>Evaluación de información estadística proveniente de fuentes diferentes.</i></p> <p>Combinatoria: permutaciones, variaciones y combinaciones. Probabilidad compuesta. Sucesos independientes y dependientes. Probabilidad condicionada. Probabilidad y experiencias. Ley de los grandes números.</p> <p><i>Cálculo de probabilidades en diferentes situaciones, interpretando los resultados obtenidos.</i></p> <p><i>Resolución de problemas sencillos que pueden resolverse por las experiencias o por simulación.</i></p> <p>* Seleccionados en el ámbito de la Orientación.</p>	
--	--	--

3.3. Lineamientos de acreditación

Cuarto año	Quinto año
<ul style="list-style-type: none"> - Actuar en forma autónoma en la resolución individual y grupal de actividades matemáticas. - Participar confiada, comprometida, perseverante y responsablemente en la resolución de actividades matemáticas. - Participar de los intercambios, comprometiéndose sus propias convicciones y dando argumentaciones de orden matemático, y no simplemente opiniones. - Valorar el lenguaje conciso y preciso de la matemática como forma de comunicar procedimientos y resultados. - Ser consciente del valor de la Matemática como bien sociocultural y como modo de pensar, de comunicar y de resolver situaciones. - Analizar y organizar información de textos, materiales audiovisuales y multimediales de carácter matemático y reprocessarla para su divulgación, utilizando gráficos, tablas, informes, diagramas, etcétera. - Participar comprometidamente en el análisis crítico y/o la resolución de diversas situaciones complejas, en tanto ciudadano responsable y futuro protagonista en el ámbito de los estudios superiores y del trabajo. 	
Resolver situaciones que impliquen:	Resolver situaciones que impliquen:
<ul style="list-style-type: none"> - representar, comparar y usar números reales. - interpretar y usar la notación con intervalos y módulos, de subconjuntos de los números reales. - estimar, interpretar y comunicar los resultados, comprobando su razonabilidad, valorando su precisión y justificando los procedimientos empleados para obtenerlos. 	<ul style="list-style-type: none"> - calcular logaritmos, en forma exacta y aproximada; mental, por escrito y con calculadora, usando las propiedades correspondientes. - estimar, interpretar y comunicar los resultados de los cálculos, comprobando su razonabilidad, valorando su precisión y justificando los procedimientos empleados para obtenerlos.

Cuarto año	Quinto año
<ul style="list-style-type: none"> - analizar, describir y extender sucesiones numéricas. - modelizar fenómenos mediante funciones (potenciales y racionales), y analizar desde sus expresiones (analítica y gráfica), los comportamientos y elementos. - operar con polinomios aplicando las propiedades correspondientes y generalizando soluciones o resultados. - reconocer y utilizar los diferentes casos de factorización en contextos, tanto algebraicos como analíticos. 	<ul style="list-style-type: none"> - analizar, describir, extender y determinar el límite de sucesiones numéricas. - modelizar fenómenos mediante funciones (exponenciales, logarítmicas y trigonométricas), y analizar desde sus expresiones (analítica y gráfica), los comportamientos y elementos. - calcular las razones trigonométricas de distintos ángulos en base a las relaciones conocidas. - usar las nociones de límite, continuidad y derivada, en relación con el análisis de las funciones. - plantear y resolver ecuaciones, sistemas de ecuaciones, e identidades trigonométricas.
<ul style="list-style-type: none"> - usar vectores, operando con ellos y utilizando las propiedades correspondientes. - reconocer, usar y modelizar fenómenos de la realidad mediante cónicas, interpretando sus elementos y propiedades. - establecer relaciones entre las distintas expresiones de las rectas. 	<ul style="list-style-type: none"> - usar vectores, operando con ellos y utilizando las propiedades correspondientes. - usar conceptos trigonométricos para resolver problemas prácticos relacionados con los triángulos. - establecer relaciones entre las distintas expresiones de las rectas y los planos. - representar rectas y planos en el contexto de las figuras y de los cuerpos.
<ul style="list-style-type: none"> - recolectar, organizar, procesar, interpretar y comunicar la información estadística utilizando diferentes representaciones. - interpretar el significado de los parámetros centrales y de dispersión 	<ul style="list-style-type: none"> - analizar fenómenos colectivos mediante recursos estadísticos. - integrar los contenidos referidos a estadística y probabilidad en un proyecto afín a la Orientación.

Cuarto año	Quinto año
<p>más comunes para la toma de decisiones.</p> <ul style="list-style-type: none"> - transferir las técnicas propias de la combinatoria a contextos probabilísticos. - estimar, calcular e interpretar la probabilidad experimental y teórica de diversos sucesos. 	<p>proyecto afín a la Orientación.</p> <ul style="list-style-type: none"> - asignar probabilidades a fenómenos aleatorios simples y compuestos.

4. Bibliografía

Este listado contiene textos, publicaciones periódicas, documentos curriculares de otras jurisdicciones, utilizados para las definiciones teóricas y metodológicas de la matemática; sugiriéndose su consulta para el fortalecimiento de la formación docente.

- ABRATE, R. y POCHULU, M. (comps.), 2007, *Experiencias, propuestas y reflexiones para la clase de Matemática*. Universidad Nacional de Villa María. Pcia de Córdoba. Argentina.
- ALAGIA, H., et al., 2005, *Reflexiones teóricas para la Educación Matemática*. Buenos Aires. Libros del Zorzal.
- ALSINA C., et al., 1996, *Enseñar matemáticas*. Barcelona, España. GRAO.
- ALFIZ, I., 2001, *El Proyecto Educativo Insitucional. Propuestas para un diseño colectivo*. Argentina. Aique.
- ARTIGUE M., et al., 1995, *Ingeniería Didáctica en educación matemática*. Bogotá. Grupo Editorial Iberoamérica.
- BROUSSEAU, G., 2007, *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires. Libros del Zorzal.
- CAMILLONI A. et al. 1998, *La evaluación de los aprendizajes en el debate didáctico contemporáneo*. Argentina. Paidós Educador.
- CASTRO, E. y CASTRO, E., 1997, *Capítulo IV: Representaciones y Modelización*. En: *La Educación Matemática en la Escuela Secundaria*. Rico, L. (coord.). Barcelona, España: ICE/HORSORI.
- CASTRO MARTÍNEZ, E., 1995, *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. Granada. España. COMARES.
- CHEVALLARD, Y., BOSCH, M., GASCÓN, J., 1997. *Cap. 1 Hacer y estudiar Matemáticas en la Sociedad*. En: *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona, España: ICE/HORSORI.
- Colección en Fascículos: *El mundo de la matemática*. Fundación Polar y el diario Últimas Noticias. Venezuela. 2004
- CONSEJO PROVINCIAL DE EDUCACIÓN DE RÍO NEGRO. REPÚBLICA ARGENTINA. 2007. MÓDULOS 1, 2 y 3.. Programa de Actualización para la Transformación de la Escuela Secundaria. Comisión Resolución 611/06.
- DE BURGOS, J., 1996, *Álgebra lineal*. España. Ed. Mc Graw - Hill.
- DE GUZMÁN, M. y COLERA, J., 1989, *Matemáticas I*. C.O.U. Barcelona. Ed. Anaya.
- DE GUZMÁN, M.; RICO, L., 1997, *Bases teóricas del Currículo de Matemáticas en Educación Secundaria*. España. Ed. Síntesis.
- DÍAZ GODINO, J., et al., 1996, *Azar y probabilidad*. Nº 27. España. Ed. Síntesis.

- DISEÑOS CURRICULARES PROVINCIALES DE LA REPÚBLICA ARGENTINA (Provincias de Buenos Aires, Chubut, La Pampa).
- GÁLVEZ, G.; VILLARROEL, M., 1988, *La enseñanza de las matemáticas en los niveles básico y medio en Chile*. Boletín de UNESCO Nº 15. Santiago de Chile.
- GIMÉNEZ RODRÍGUEZ, J., 1997, *Evaluación en Matemáticas. Una integración de perspectivas*. España. Ed. Síntesis.
- GOBIERNO DE LA CIUDAD AUTÓNOMA DE BUENOS AIRES. MINISTERIO DE EDUCACIÓN. DIRECCIÓN DE CURRÍCULA Y ENSEÑANZA. DIRECCIÓN GENERAL DE PLANEAMIENTO. 2009. Contenidos para el Nivel Medio.
- GOBIERNO DE LA CIUDAD DE BUENOS AIRES. SECRETARÍA DE EDUCACIÓN. SUBSECRETARÍA DE EDUCACIÓN. DIRECCIÓN GRAL DE PLANEAMIENTO. 2005. Documento Nº 2: Apoyo a los alumnos de primer año en los inicios del nivel medio.
- GVIRTZ, S., PALAMIDESI, M., 2005, *El ABC de la tarea docente: Currículum y enseñanza*. Buenos Aires. Ed. Aique
- HERNÁNDEZ F., SANCHO J.M., 1996, *Para enseñar no basta con saber la asignatura*. Papeles de Pedagogía. Paidós. Barcelona.
- ITZCOVICH, H., 2005, *Iniciación al estudio didáctico de la geometría. De las construcciones a las demostraciones*. Buenos Aires. Libros del Zorzal.
- KILPATRICK, J.; GÓMEZ, P. y RICO, L., 1995, *Educación matemática*. México. Grupo Editorial Iberoamericana.
- LACASTA, E. y PASCUAL, J. *Las funciones en los gráficos cartesianos*. Madrid. España. Ed. Síntesis.
- LANGFORD, P., 1990, *El Desarrollo del Pensamiento Conceptual en la Escuela Secundaria*. Barcelona. España. Paidós.
- LARSON, L., HOSTETLER, R. y EDWARDS, B., 1996, *Cálculo. Volumen 1*. Quinta Edición. España. Ed. Mc Graw - Hill.
- MARTÍNEZ – MEDIANO, J.M., et al., 1998, *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales*. España. Ed. Mc Graw - Hill.
- MARTINS SUÁREZ, D. y PENHA LÓPEZ, M., 1997, *Sucesso e fracasso em Matemática. Apresentação en el Encuentro sobre Teoría e Pesquisa em Ensino de Ciências*. Brasil.
- MINISTERIO DE CULTURA Y EDUCACIÓN DE LA NACIÓN. REPÚBLICA ARGENTINA, 1994. SAIZ, I. ,Resolución de problemas. Documento Complementario.
- MINISTERIO DE CULTURA Y EDUCACIÓN DE LA NACIÓN. REPÚBLICA ARGENTINA, CONSEJO FEDERAL DE CULTURA Y EDUCACION. 1997. Contenidos Básicos para la Educación Polimodal. Primera Edición.

- MINISTERIO DE CULTURA Y EDUCACIÓN DE LA PROVINCIA DE RÍO NEGRO. Dirección de Gestión Curricular, 1998. BRESSAN, A., “La evaluación en matemática. Enfoques actuales”.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CIENCIA Y TECNOLOGÍA. REPÚBLICA ARGENTINA. 2007. Informe Final de la Comisión Nacional para el Mejoramiento de la Enseñanza de las Ciencias Naturales y la Matemática.
- ORTEGA, T., 2005, *Conexiones matemáticas. Motivación del alumnado y competencia matemática*. Barcelona. Ed. GRAÓ.
- ORTON, A. ,1990, *Didáctica de las matemáticas*. Madrid. España. Ed. Morata S.A.
- PANIZZA, M., 2005, *Razonar y conocer. Aportes a la comprensión de la racionalidad matemática de los alumnos*. Buenos Aires. Libros del Zorzal.
- PEREZ GIL D. y GUZMAN OZAMIZ M.,1994, *Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. Tendencias e Innovaciones*. Ediciones Popular S. A. OEI.
- PIMM, D.,1990, *El lenguaje matemático en el aula*. Madrid. Ed. Morata.
- REPÚBLICA ARGENTINA, 1993, Ley Federal de Educación N° 24.195.
- REPÚBLICA ARGENTINA. PROVINCIA DE RÍO NEGRO, 1991, Ley Orgánica de Educación N° 2244.
- SÁNCHEZ de MAGURNO, J., 1996, Caracterización del Tercer Ciclo de EGB en relación con sus funciones y destinatarios. Ministerio de Cultura y Educación. Córdoba.
- SADOVSKY, P. 2005. *Enseñar Matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*. Buenos Aires. Libros del Zorzal.
- SANTALÓ, L.,1986, *La enseñanza de la Matemática en la Escuela Media*. Buenos Aires. Docencia Editorial.
- SANTALÓ, L.,1980, *Matemática y Sociedad*. Buenos Aires. Docencia Editorial.
- SANTALÓ, L., y otros,1994, *De Educación y Estadística*. Buenos Aires. Ed. Kapelusz.
- SAWYER; W., 2003, *¿Qué trata el cálculo?* Serie New Mathematical Library, N° 2. Decimoquinta Edición. Toronto. Publicado por Mathematical Association of América.
- SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA DE MÉXICO,1993, “Curriculum de Educación Básica Secundaria”. México.
- SEGAL, S. y GIULIANI, D., 2008, *Modelización matemática en el aula*. Buenos Aires. Libros del Zorzal.
- SESSA, C., 2006, *Iniciación al estudio didáctico del álgebra. Orígenes y perspectivas*. Buenos Aires. Libros del Zorzal.
- UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA. IMAF, 1993. BROUSSEAU, G. , “*Fundamentos y Métodos de la Didáctica de la Matemática*”. Traducción Fregona, D. y Ortega, F. . Argentina. Serie Trabajos de Matemática.

Publicaciones Periódicas

- REVISTA NOVEDADES EDUCATIVAS. Edición Nº 146,149, 153, 190, 197, 200, 208, 219. Argentina. Centro de Publicaciones Educativas y Material Didáctico S.R.L.
- REVISTA ELEMENTOS DE MATEMÁTICA. Publicación Didáctico Científica Editada por la Universidad CAECE. Argentina.
- REVISTA UNO DE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS. Nº 4, 15, 16, 35, 41 y 55. Barcelona. Ed. GRAÓ.

Páginas en Internet

La información dada en este campo puede resultar obsoleta en el momento de su aparición, debido a los cambios permanentes que se introducen con las nuevas tecnologías. No obstante, vale la pena indicar algunas páginas con diversos materiales disponibles en muchos centros de recursos.

www.gpdmatematica.org.ar del Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática, en la que encontrarán publicaciones, ideas para el aula, propuestas de trabajo, galería de problemas, etcétera.

<http://www.matematicas.net/> El paraíso de las matemáticas, presenta una Programoteca para trabajar diferentes temas, artículos matemáticos (teóricos y prácticos), papiroflexia, origami, juegos y más.

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/> Recursos para el estudio y profundización en la historia de la matemática, elaborada por la Universidad de St. Andrews (Escocia).

<http://divulgamat.ehu.es/weborriak/RetosMatematicos/index.asp> del Centro Virtual de Didáctica de las Matemáticas, propone retos matemáticos, problemas, publicaciones de divulgación, textos on-line, recursos en internet, etcétera.

<http://platea.pntic.mec.es/aperez4/html/presentacion.html#indice>. Historia de las matemáticas a través de la imagen. Egipto y Babilonia, Grecia y Roma, Newton y Leibniz, Gauss.

<http://cut-the-knot.org> Matemática interactiva, misceláneas y rompecabezas. Incluye varios temas: geometría, aritmética, álgebra, probabilidad, combinatoria, juegos matemáticos, ilusiones ópticas y más.

<http://plus.maths.org> Plus Magazine es una revista que abre una puerta al mundo de las matemáticas, con toda su belleza y las aplicaciones, proporcionando [artículos](#) de los matemáticos más reconocidos escritores de ciencia y sobre temas tan diversos como el arte, la medicina, la cosmología y el deporte.

<http://mathworld.wolfram.com> Un recurso gratuito de la Investigación Wolfram construido con tecnología matemática. Incluye materiales de álgebra, matemática aplicada, cálculo y análisis, matemática discreta, fundamentos de la matemática, teoría de números, estadística y probabilidad, matemáticas recreativas, etcétera.

<http://wcer.wisc.edu/ncisla/> Centro Nacional de Matemática y Ciencias (USA). Este centro trabaja con docentes y escuelas para mejorar el aprendizaje de los alumnos en Matemática Y Ciencias a lo largo de su escolaridad. Incluye una visión general del programa, publicaciones, recursos para docentes, etcétera.

<http://britton.disted.camosun.bc.ca/pascal/pascal.html> Incluye el Triángulo de Pascal y sus patrones: números primos, suma de filas, sucesión de Fibonacci, números triangulares, poligonales, etcétera.

<http://msteacher.org> Portal de profesores de Matemática y Ciencias de escuela media. Incluye variados recursos en diferentes temas: álgebra, teoría de números, cálculo, geometría, trigonometría, número y operaciones, etcétera.

<http://www.fi.uu.nl/en> El Instituto Freudenthal de Ciencia y Educación Matemática (Flsme) tiene como objetivo mejorar la educación en los campos de la aritmética, matemáticas y ciencias, en la educación primaria, secundaria y profesional. El Instituto contribuye a este objetivo mediante la investigación, la enseñanza, el desarrollo curricular y los servicios.

<http://www.mlevitus.com/index.html> Página en castellano, con variedad de actividades, juegos, acertijos, etc. Incluye las respuestas a los problemas. Con links interesantes en inglés.

<http://www.matejoven.mendoza.edu.ar/matejue/matejueg.htm> Propone un repertorio de juegos clásicos y siempre vigentes: 3 en raya, 4 en línea, Mastermind, Eliminando cuadrados (Tetris); cubo mágico, entre otros. Cada juego está acompañado de sus instrucciones en castellano.

<http://www.cut-the-knot.org/games.shtml> Sitio en inglés, de matemática interactiva. Propone decenas de juegos relacionados con la medida, el dinero, el cálculo y la memoria.